

# BAKİ UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

---

---

ВЕСТНИК  
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

---

---

NEWS  
OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT ELMLƏRİ  
*seriyası*

---

*серия*  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

---

*series of*  
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 3  
2019

## RİYAZİYYAT

УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н.А.АЛИЕВ, Е.Ю.МУСТАФАЕВА

*Бакинский Государственный Университет*  
*yelenamustafayeva@gmail.com*

*Излагаемая работа посвящена исследованию решения смешанной задачи для трехмерного волнового уравнения с нелокальными граничными условиями. После преобразования Лапласа поставленная смешанная задача сводится к двухмерной граничной задаче с нелокальными граничными условиями для уравнения Гельмгольца. Устанавливаются условия Фредгольмовости полученной граничной задачи. Разрешимость поставленной задачи доказана оригинальным методом.*

**Ключевые слова.** Трехмерное уравнение гиперболического типа, нелокальные граничные условия, преобразование Лапласа, фундаментальные решения, необходимые условия, регуляризация, фредгольмовость.

Мы исследовали фредгольмовость многих трехмерных задач с нелокальными граничными условиями как для типовых, так и нетиповых дифференциальных уравнений. В отличие от классических задач мы изучили уравнения как четного, так и нечетного порядков. Граничные условия таковы, что вся граница является носителем для каждого граничного условия.

В 1968-70-х годах мы интересовались несуществованием решений граничных задач. После большой работы с литературой было определено, что решение граничных задач может не существовать по следующим причинам:

- 1) из-за уравнения задачи;
- 2) из-за границы области;
- 3) из-за граничных условий задачи.

Как мы знаем, одним из главных результатов по задачам Коши для дифференциальных уравнений в частных производных является теорема Коши-Ковалевской [1]. Если все данные задачи Коши – аналитические функции, то решение этой задачи является аналитическим.

И.Г.Петровский в 1946 г. на одной из конференций высказал, «что может быть, если отказаться от аналитичности данных». Ответ на этот вопрос принадлежит Н.Леви. Он в 1957 г. [2] привел пример, в котором рассматривается трехмерное линейное неоднородное уравнение первого порядка с аналитическими коэффициентами, но с бесконечно дифференцируемой, но не аналитической правой частью, где приведенное уравнение не имеет даже локального решения. Далее этим вопросом занимался Хёрмандер [3],[4] и за эти работы получил в 1962 г. медаль Филдса.

Что касается второй проблемы, А.Лебег занимался этим вопросом в 1913 г. [5]. Он показал, что задача Дирихле для яблоко-подобной области не имеет решения. Позже в 1924 году, он дал класс областей, в которых рассматриваемая краевая задача неразрешима [6]. Далее, данный вопрос был рассмотрен Н.Винером [7], Егоровым [8], А.Новрузовым [9] и И.Мамедовым [10]. Наконец, третий вопрос, поставленный выше, был рассмотрен А.В.Бицадзе [11], Бегером [12]-[14], А.А.Дезиным [15] и Н.А.Алиевым [16]. Все эти работы опираются на некоторые условия и (за исключением [16]) посвящены граничным задачам, а в [15] исследованы только краевые задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения. В [11], где рассматривается уравнение Лапласа, эти условия называются необходимыми и достаточными. Регуляризация этих условий дана только в двухмерном случае. Утверждение, что регуляризация в трехмерном случае подобна двумерному случаю, неверно.

Что касается работ [12]-[14], то полученные необходимые локальные условия не исследованы, но только предполагается, что в задаче Дирихле (которая для уравнений Коши-Римана некорректна) данная функция удовлетворяет необходимым условиям.

Следует обратить внимание, что для линейного обыкновенного дифференциального уравнения эти необходимые условия являются обычными граничными условиями, а для уравнений в частных производных эти условия имеют вид сингулярных интегральных уравнений. Эти сингулярности имеют специальный вид и не регуляризуются, как в общем случае [17], [18].

Кроме того, на основе указанных нелокальных граничных условий и регуляризованных выражений, полученные из необходимых условий, получены достаточные условия для фредгольмовости поставленных краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$lu(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_0^2} - a^2 \left( \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (1)$$

в трехмерной области  $D = \{x = (x_0, x_1, x_2), x_0 > 0, (x_1, x_2) = x' \in S \subset R^2\}$  с нелокальными граничными условиями:

$$l_i u \equiv \sum_{j=1}^2 \left[ \alpha_{ij}^{(1)}(x_1) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)} + \alpha_{ij}^{(2)}(x_1) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \right] + \sum_{k=1}^2 \alpha_i^{(k)}(x_1) u(x_0, x_1, \gamma_k(x_1)) = 0, \quad i = 1, 2; \quad x_1 \in [a, b] = pr_{Ox_1} S. \quad (2)$$

и начальными условиями

$$u(0, x_1, x_2) = \varphi_0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=0} = \varphi_1(x_1, x_2). \quad (3)$$

Здесь область  $S \subset Ox_1x_2$  является проекцией области  $D$  на плоскость  $Ox_1x_2 = Ox'$ , коэффициенты  $\alpha_{ij}^{(k)}(x_1), i, k = 1, 2, j=1, 2$ , удовлетворяют условию Гельдера,  $\alpha_i^{(k)}(x_1), i, k = 1, 2$ , непрерывные функции на отрезке  $[a, b]$ .

Применим к уравнению (1) и граничному условию (2) преобразование Лапласа по  $x_0$  ( $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_0^2} \rightarrow p^2 \tilde{u} + pu(0, x_1, x_2) - \frac{\partial u(x)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=0}$ ). Тогда получим двумерное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \tilde{u}(p, x') + k^2 \tilde{u}(p, x') = f(p, x'), \quad x' \in S, \quad (4)$$

где  $k = \frac{p}{a}$  - константа,  $f(p, x_1, x_2) = -pu(0, x_1, x_2) + \frac{\partial u(x)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=0}$ , и граничные условия:

$$l_i \tilde{u} \equiv \sum_{j=1}^2 \left[ \alpha_{ij}^{(1)}(x_1) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)} + \alpha_{ij}^{(2)}(x_1) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \right] + \sum_{k=1}^2 \alpha_i^{(k)}(x_1) \tilde{u}(p, x_1, \gamma_k(x_1)) = 0, \quad i = 1, 2; \quad x_1 \in [a, b]. \quad (5)$$

Без ограничения общности, добавим еще одно граничное условие на множестве меры нуль:

$$\tilde{u}(p, a, \gamma_1(a)) = A, \quad \tilde{u}(p, b, \gamma_1(b)) = B. \quad (5')$$

Уравнение (4) имеет фундаментальное решение [19]

$$U(x' - \xi') = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x' - \xi'|),$$

где функция Ханкеля

$$H_0^{(1)}(x) = -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Значит, фундаментальное решение уравнения (4) имеет вид:

$$U(x' - \xi') = -\frac{i}{4} \left( -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{k|x' - \xi'|} + \dots \right) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{k|x' - \xi'|} + \dots = \frac{1}{2\pi} \ln k|x' - \xi'| + \dots, \quad (6)$$

которое имеет частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x' - \xi')}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2\pi} \ln k|x' - \xi'| + \dots = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k|x' - \xi'|} \frac{k(x_i - \xi_i)}{|x' - \xi'|} + \dots = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(x' - \xi', x_i)}{|x' - \xi'|} + \dots, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

## 2. Необходимые условия.

Умножим уравнение (4) на фундаментальное решение (6) и проинтегрируем по области  $S$ :

$$\int_S (\Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u}) U(x' - \xi') dx' = \int_S f(p, x') U(x' - \xi') dx', \quad (8)$$

Проинтегрируем по частям левую часть (8):

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^2 \int_S \frac{\partial^2 \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j^2} U(x' - \xi') dx' + \int_S k^2 \tilde{u}(p, x') U(x' - \xi') dx' = \\ &= \sum_{j=1}^2 \left[ \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} U(x' - \xi') \cos(v_{x'}, x_j) dx' - \int_S \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} \frac{\partial U(x' - \xi')}{\partial x_j} dx' \right] + \\ &\quad + \int_S k^2 \tilde{u}(p, x') U(x' - \xi') dx' = \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} U(x' - \xi') - \tilde{u}(p, x') \frac{\partial U(x' - \xi')}{\partial x_j} \right) \cos(v_{x'}, x_j) dx' + \\ &\quad + \int_S \tilde{u}(p, x') \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 U(x' - \xi')}{\partial x_j^2} dx' + \int_S k^2 \tilde{u}(p, x') U(x' - \xi') dx' = \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} U(x' - \xi') - \tilde{u}(p, x') \frac{\partial U(x' - \xi')}{\partial x_j} \right) \cos(v_{x'}, x_j) dx' + \int_S \tilde{u}(p, x') \delta(x' - \xi') dx'. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) учтем, что  $U(x' - \xi')$  - фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, то есть

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 U(x' - \xi')}{\partial x_j^2} + k^2 U(x' - \xi') = (\Delta_{x'} + k^2 I)U(x' - \xi') = \delta(x' - \xi')$$

является функцией Дирака. Учитывая это и подставляя (9) в (8), мы имеем соотношение

$$\begin{aligned} & \int_S f(p, x') U(x' - \xi') dx' = \\ & = \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} U(x' - \xi') - \tilde{u}(p, x') \frac{\partial U(x' - \xi')}{\partial x_j} \right) \cos(v_{x'}, x_j) dx' + \int_S \tilde{u}(p, x') \delta(x' - \xi') dx', \end{aligned}$$

откуда получаем первое основное соотношение

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} U(x' - \xi') - \tilde{u}(p, x') \frac{\partial U(x' - \xi')}{\partial x_j} \right) \cos(v_{x'}, x_j) dx' - \\ & - \int_S f(p, x') U(x' - \xi') dx' = \int_S \tilde{u}(p, x') \delta(x' - \xi') dx' = \begin{cases} \tilde{u}(p, \xi'), & \xi' \in S, \\ \frac{1}{2} \tilde{u}(p, \xi'), & \xi' \in \Gamma. \end{cases} \quad (10) \end{aligned}$$

Второе из соотношений (10) называется **1-ым необходимым условием разрешимости задачи (1)-(2)**:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{u}(p, \xi') & = - \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} U(x' - \xi') - \tilde{u}(p, x') \frac{\partial U(x' - \xi')}{\partial x_j} \right) \cos(v_{x'}, x_j) dx' + \\ & + \int_S f(p, x') U(x' - \xi') dx', \quad \xi' \in \Gamma. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{u}(p, \xi') & = - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial v_{x'}} U(x' - \xi') - \tilde{u}(p, x') \frac{\partial U(x' - \xi')}{\partial v_{x'}} \right) dx' + \\ & + \int_S f(p, x') U(x' - \xi') dx', \quad \xi' \in \Gamma. \quad (11) \end{aligned}$$

Подставляя (6) в (11), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{u}(p, \xi') & = - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial v_{x'}} \frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| - \tilde{u}(p, x') \frac{\partial}{\partial v_{x'}} \left( \frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| \right) \right) dx' + \\ & + \int_S f(p, x') \frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| dx' + \dots, \quad \xi' \in \Gamma. \quad (12) \end{aligned}$$

Интегралы в (12) имеют слабую особенность, поэтому являются слабо-сингулярными.

**Теорема 1.** *Необходимое условие (12) является регулярным.*

Умножая (4) на  $\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}$ ,  $m = \overline{1,2}$ , и интегрируя по области  $S$ , мы

получаем следующее:

$$\int_S (\Delta \tilde{u}(p, x') + k^2 \tilde{u}(p, x')) \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m} dx' = \int_S f(p, x') \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m} dx'. \quad (13)$$

Интегрируя (13) по частям, мы получим:

$$\begin{aligned} \int_S f(p, x') \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m} dx' &= \int_S (\Delta \tilde{u}(p, x') + k^2 \tilde{u}(p, x')) \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m} dx' = \\ &= \int_S \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j^2} \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m} dx' + \int_S k^2 \tilde{u}(p, x') \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m} dx' = \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} \left( \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m} \cos(v_{x'}, x_j) - \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j} \cos(v_{x'}, x_m) \right) dx' + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_m} \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j} \cos(v_{x'}, x_j) dx' + \int_{\Gamma} k^2 \tilde{u}(p, x') U(x'-\xi') \cos(v_{x'}, x_m) dx' - \\ &\quad - \int_S [\Delta U(x'-\xi') + k^2 U(x'-\xi')] \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_m} dx', \end{aligned}$$

откуда, в силу того, что  $\Delta U(x'-\xi') + k^2 U(x'-\xi') = \delta(x'-\xi')$  и  $\sum_{j=1}^2 \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j} \cos(v_{x'}, x_j) = \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial v_{x'}}$ , получим остальные два основных соотношения:

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_m} \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial v_{x'}} dx' + \\ &+ \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m} \cos(v_{x'}, x_j) - \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j} \cos(v_{x'}, x_m) \right] dx' + \\ &+ \int_{\Gamma} k^2 \tilde{u}(p, x') U(x'-\xi') \cos(v_{x'}, x_m) dx' - \int_S f(p, x') \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m} dx' = \\ &= \begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_m}, & \xi' \in S, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_m}, & \xi' \in \Gamma, \end{cases} \quad m = \overline{1,2}, \quad (14) \end{aligned}$$

где числа  $m, j$  образуют перестановку чисел 1,2.

Вторые выражения в (14) - это остальные два **необходимых условия**(для  $\xi' \in \Gamma, i = \overline{1,2}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_m} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x_m} \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial v_x} dx + \\ &+ \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_m} \cos(v_{x'}, x_j) - \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_j} \cos(v_{x'}, x_m) \right] dx + \\ &+ \int_{\Gamma} k^2 \tilde{u}(p, x') U(x' - \xi') \cos(v_{x'}, x_m) dx' - \int_S f(p, x') \frac{\partial U(x' - \xi')}{\partial x_m} dx', \quad (15) \end{aligned}$$

где числа  $m, j$  образуют перестановку чисел 1,2,  $m \neq j$ .

Подставляя (6) и (7) в (15), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_m} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_m} \frac{\partial U(x' - \xi')}{\partial v_{x'}} dx' + \\ &+ \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} \left[ -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(x' - \xi', x_i)}{|x' - \xi'|} \cos(v_{x'}, x_j) + \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(x' - \xi', x_j)}{|x' - \xi'|} \cos(v_{x'}, x_m) \right] dx' + \\ &+ \int_{\Gamma} k^2 \tilde{u}(p, x') \left( -\frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| \right) \cos(v_{x'}, x_m) dx' - \\ &\int_S f(p, x') \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(x' - \xi', x_m)}{|x' - \xi'|} \right) dx' + \dots \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_m} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_m} \frac{\partial U(x' - \xi')}{\partial v_{x'}} dx' + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} \left[ \frac{\cos(x' - \xi', x_j) \cos(v_{x'}, x_m) - \cos(x' - \xi', x_i) \cos(v_{x'}, x_j)}{|x' - \xi'|} \right] dx' - \\ &- \frac{k^2}{2\pi} \int_{\Gamma} \tilde{u}(p, x') (\ln k |x' - \xi'|) \cos(v_{x'}, x_m) dx' - \frac{1}{2\pi} \int_S f(p, x') \left( \frac{\cos(x' - \xi', x_m)}{|x' - \xi'|} \right) dx' + \dots, \quad (16). \end{aligned}$$

Интеграл по нормальной производной фундаментального решения не является сингулярным. Последний интеграл в (16) сходится по Коши при условии Гельдера на функцию  $f(p, x')$ . А вот второй интеграл в (16) сингулярный, так как порядок сингулярности совпадает с размерностью интеграла ( $n=1$ ). Эту сингулярность будем регуляризовать специальным оригинальным методом.

Вводя обозначение



$$K_{mj}(x', \xi') = \cos(x' - \xi', x_j) \cos(v_{x'}, x_m) - \cos(x' - \xi', x_m) \cos(v_{x'}, x_j),$$

перепишем 2-ое и 3-е необходимые условия (16) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_m} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_m} \frac{\partial U(x' - \xi')}{\partial v_{x'}} dx' + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} \frac{K_{mj}(x', \xi')}{|x' - \xi'|} dx' - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_S f(p, x') \left( \frac{\cos(x' - \xi', x_m)}{|x' - \xi'|} \right) dx' + \dots, \end{aligned} \quad (17).$$

где числа  $m, j$  образуют перестановку чисел  $1, 2, j \neq m$ .

**Теорема 2.** *Необходимые условия (17) являются сингулярными.*

Выделим только сингулярные слагаемые в необходимых условиях (17) ( $m = 1, 2$ ) и разложим граничные интегралы по верхней ( $k=1$ ) и нижней ( $k=2$ ) полуграницам  $\Gamma_k = \{\xi' = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1 \in [a, b], \xi_2 = \gamma_k(\xi_1)\}, k = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_m} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} \frac{K_{mj}(x', \xi')}{|x' - \xi'|} dx' + \dots = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} \frac{K_{mj}(x', \xi')}{|x' - \xi'|} dx' + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} \frac{K_{mj}(x', \xi')}{|x' - \xi'|} dx' + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая, что  $dx' = \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)}$  на верхней полугранице ( $k=1$ ) и

$dx' = -\frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)}$  на нижней полугранице ( $k=2$ ) в (18) получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_m} \Big|_{\xi_2 = \gamma_k(x_1)} = \\ &(-1)^{k+1} \sum_{s=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\partial \tilde{u}(p, x)}{\partial x_j} \Big|_{x_2 = \gamma_s(x_1)} \frac{K_{mj}(x', \xi')}{|x' - \xi'|} \Big|_{\substack{x_2 = \gamma_s(x_1) \\ \xi_2 = \gamma_k(x_1)}} \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \dots, \\ &i, k = 1, 2; j \neq m. \end{aligned} \quad (19)$$

В (19) оставим только сингулярные слагаемые ( $k = s$ ), остальные слагаемые обозначим многоточием:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_m} \Big|_{\xi_2 = \gamma_k(x_1)} = \\ &(-1)^{k+1} \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)} \frac{K_{mj}(x', \xi')}{|x' - \xi'|} \Big|_{\substack{x_2 = \gamma_k(x_1) \\ \xi_2 = \gamma_k(x_1)}} \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $m, k = 1, 2; j \neq m$ .

Введем обозначения:

$$K_{mj}^{(k)}(x_1, \xi_1) = K_{mj}(x', \xi') \Big|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1) \\ \xi_2=\gamma_k(\xi_1)}}, \quad k=1,2. \quad (21)$$

Рассмотрим  $|x' - \xi'|^2 \Big|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1) \\ \xi_2=\gamma_k(\xi_1)}}, k=1,2$ , в знаменателе подынтегральных выражений (21):

$$\begin{aligned} |x' - \xi'|^2 \Big|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1) \\ \xi_2=\gamma_k(\xi_1)}} &= |x_1 - \xi_1|^2 + (\gamma_k(x_1) - \gamma_k(\xi_1))^2 = \\ &= |x_1 - \xi_1|^2 [1 + (\gamma_k'(x_1))^2 + O(|x_1 - \xi_1|)] \end{aligned} \quad (22)$$

Введем обозначения:

$$P_k(x_1, \xi_1) = \sqrt{1 + (\gamma_k'(x_1))^2 + O(|x_1 - \xi_1|)}$$

откуда мы можем переписать (22) следующим образом:

$$|x' - \xi'| \Big|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1) \\ \xi_2=\gamma_k(\xi_1)}} = |x_1 - \xi_1| P_k(x_1, \xi_1). \quad (23)$$

**З а м е ч а н и е 1.** Заметим, что для  $\xi_1 = x_1$  мы имеем:

$$P_k(x_1, x_1) = \sqrt{1 + \left(\frac{d\gamma_k}{dx_1}\right)^2} \neq 0, \quad k=1,2.$$

При помощи обозначений (21), (23) мы можем переписать необходимые условия (19) для  $m, k=1,2; j \neq m$ , следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_m} \Big|_{\xi_2=\gamma_k(x_1)} = \\ &(-1)^{k+1} \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\partial \tilde{u}(p, x'')}{\partial x_j} \Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} \frac{K_{mj}^{(k)}(x_1, \xi_1)}{|x_1 - \xi_1| P_k(x_1, \xi_1) \cos(\nu_{x', x_2})} dx_1 + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Чтобы выделить сингулярные слагаемые в подынтегральных выражениях в необходимых условиях (24), мы сначала разложим все коэффициенты при производных по формуле Тейлора в точке  $\xi_1 = x_1$ :

$$\frac{K_{mj}^{(k)}(x_1, \xi_1)}{P_k(x_1, \xi_1)} = \frac{K_{mj}^{(k)}(x_1, x_1)}{P_k(x_1, x_1)} + \frac{d}{dx_1} \left( \frac{K_{mj}^{(k)}(x_1, x_1)}{P_k(x_1, x_1)} \right) (x_1 - \xi_1) + \dots$$

Подставляя полученное разложение для  $\frac{K_{mj}^{(k)}(x_1, \xi_1)}{P_k(x_1, \xi_1)}$  в необходимые

условия (24) и учитывая, что слагаемое  $\frac{d}{dx_1} \left( \frac{K_{mj}^{(k)}(x_1, x_1)}{P_k(x_1, x_1)} \right) (x_1 - \xi_1)$ , имеет слабую сингулярность, мы выделим только сингулярные слагаемые. То-

гда необходимые условия (24) примут окончательный вид для регуляризации:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_m} \Big|_{\xi_2 = \gamma_k(x_1)} =$$

$$(-1)^{k+1} \int_a^b \frac{1}{2\pi |x_1 - \xi_1|} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_j} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)} \frac{K_{mj}^{(k)}(x_1, x_1)}{P_k(x_1, x_1)} \frac{dx_1}{\cos(\nu_{x', x_2})} + \dots, \quad (25)$$

где многоточие обозначает несингулярные слагаемые или слагаемые со слабой сингулярностью, а числа  $m, j$  образуют перестановку чисел 1, 2,  $j \neq m$ .

### 3. Регуляризация необходимых условий

Вернемся теперь к 1-ому необходимому условию (3) и раскроем каждый поверхностный интеграл по верхней и нижней полукривым  $\Gamma_k = \{\xi' = (\xi_1, \xi_2) : \xi_2 = \gamma_k(\xi_1), \xi_1 \in [a, b]\}$   $k = 1, 2$ , границы  $\Gamma$  области  $S$  :

$$\frac{1}{2} \tilde{u}(p, \xi') \Big|_{\xi_2 = \gamma_k(\xi_1)} =$$

$$\int_{\Gamma} \tilde{u}(p, x') \frac{\partial}{\partial \nu_{x'}} \left( \frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| \right) dx' - \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial \nu_{x'}} \frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| dx' -$$

$$- \int_S f(p, x') \frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| dx' =$$

$$= \sum_{s=1}^2 \int_{\Gamma_s} \tilde{u}(p, x') \Big|_{x_2 = \gamma_s(x_1)} \frac{\partial}{\partial \nu_{x'}} \left( \frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| \right) \Big|_{\substack{\xi_2 = \gamma_k(\xi_1) \\ x_2 = \gamma_s(x_1)}} dx' - \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial \nu_{x'}} \frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| dx' -$$

$$- \int_S f(p, x') \frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| dx' =$$

$$= \sum_{s=1}^2 (-1)^s \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_s} \tilde{u}(p, x') \Big|_{x_2 = \gamma_s(x_1)} \left( \frac{\cos(x' - \xi', \nu_{x'})}{|x' - \xi'|} \right) \Big|_{\substack{\xi_2 = \gamma_k(\xi_1) \\ x_2 = \gamma_s(x_1)}} \frac{dx_1}{\cos(\nu_{x', x_2})} +$$

$$- \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial \nu_{x'}} \frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| dx' - \int_S f(p, x') \frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| dx', \quad \xi \in \Gamma_k.$$

или

$$\frac{1}{2} \tilde{u}(p, \xi') \Big|_{\xi_2 = \gamma_k(\xi_1)} =$$

$$\sum_{s=1}^2 (-1)^s \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_s} \tilde{u}(p, x') \Big|_{x_2 = \gamma_s(x_1)} \left( \frac{\cos(x' - \xi', \nu_{x'})}{|x' - \xi'|} \right) \Big|_{\substack{\xi_2 = \gamma_k(\xi_1) \\ x_2 = \gamma_s(x_1)}} \frac{dx_1}{\cos(\nu_{x', x_2})} +$$

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial v_{x'}} \frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| dx' - \int_S f(p, x') \frac{1}{2\pi} \ln k |x' - \xi'| dx', \quad \xi \in \Gamma_k. \quad (26)$$

Очевидно, когда  $k \neq s$  в (26), соответствующий интеграл несингулярен. Когда  $k = s$  в первой сумме в (26), тогда соответствующий интеграл имеет устранимую особенность при  $x \rightarrow \xi$ ; второй интеграл в (26) имеет слабую особенность, так как порядок особенности меньше кратности интеграла, а в третьем интеграле налагая условие Гельдера на функцию  $f(p, x')$ , получаем также устранимую особенность. Поэтому, обозначая несингулярные слагаемые многоточием в (23) и учитывая (18), мы получаем первое необходимое условие в виде (для  $k=1, 2$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \tilde{u}(p, \xi') \Big|_{\xi_2 = \gamma_k(\xi_1)} = \\ & = (-1)^k \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \tilde{u}(p, x') \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)} \left( \frac{\cos(x' - \xi', v_{x'})}{|x' - \xi'|} \right) \Big|_{\substack{\xi_2 = \gamma_k(\xi_1) \\ x_2 = \gamma_k(x_1)}} \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \dots = \\ & = (-1)^k \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \tilde{u}(p, x') \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)} \frac{\cos(x' - \xi', v_{x'}) \Big|_{\substack{\xi_2 = \gamma_k(\xi_1) \\ x_2 = \gamma_k(x_1)}}}{|x_1 - \xi_1| P_k(x_1, \xi_1)} \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \dots \quad (27) \end{aligned}$$

Построим теперь линейную комбинацию необходимых условий (25) ( $i, j = 1, 2; k = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} & \beta_{ij}^{(1)}(\xi_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2 = \gamma_1(\xi_1)} + \beta_{ij}^{(2)}(\xi_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2 = \gamma_2(\xi_1)} = \\ & = \sum_{k=1}^2 \beta_{ij}^{(k)}(\xi_1) (-1)^{k+1} \int_a^b \frac{1}{2\pi |x_1 - \xi_1|} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_m} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)} \frac{K_{jm}^{(k)}(x_1, x_1)}{P_k(x_1, x_1)} \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \dots = \\ & = \int_a^b \frac{1}{2\pi |x_1 - \xi_1|} \left[ \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \beta_{ij}^{(k)}(\xi_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_m} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)} \frac{K_{jm}^{(k)}(x_1, x_1)}{P_k(x_1, x_1)} \right] \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \dots, \quad (28) \end{aligned}$$

где  $m \neq j$ .

Прибавляя и вычитая  $\beta_{ij}^{(k)}(x_1)$  из  $\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1)$ ,  $k = 1, 2$ , в (28), мы получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \left( \beta_{ij}^{(1)}(\xi_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2 = \gamma_1(\xi_1)} + \beta_{ij}^{(2)}(\xi_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2 = \gamma_2(\xi_1)} \right) = \\ & = \sum_{j=1}^2 \int_a^b \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi |x_1 - \xi_1|} \left[ \sum_{k=1}^2 \beta_{ij}^{(k)}(x_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_m} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)} \frac{K_{jm}^{(k)}(x_1, x_1)}{P_k(x_1, x_1)} \right] \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^2 \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^2 \frac{\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1) - \beta_{ij}^{(k)}(x_1)}{|x_1 - \xi_1|} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_m} \Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} \frac{K_{jm}^{(k)}(x_1, x_1)}{P_k(x_1, x_1)} \right] \frac{(-1)^{k+1} dx_1}{2\pi \cos(v_{x'}, x_2)} + \dots \quad (29)$$

Предполагая, что функции  $\beta_{ij}^{(k)}(\xi)$  удовлетворяют условию Гёльдера, мы получаем слабые особенности в интегралах с  $\frac{\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1) - \beta_{ij}^{(k)}(x_1)}{|x_1 - \xi_1|}$ . Отбросив

слагаемые со слабыми особенностями в (29), получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \left( \beta_{ij}^{(1)}(\xi_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + \beta_{ij}^{(2)}(\xi_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} \right) = \\ & = \int_a^b \frac{1}{2\pi |x_1 - \xi_1|} \left[ \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \beta_{ij}^{(k)}(x_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_m} \Big|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1) \\ m \neq j}} \frac{K_{jm}^{(k)}(x_1, x_1)}{P_k(x_1, x_1)} \right] \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \dots = \\ & = \int_a^b \frac{1}{2\pi |x_1 - \xi_1|} \left[ \sum_{j=1}^2 \beta_{ij}^{(1)}(x_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_m} \Big|_{\substack{x_2=\gamma_1(x_1) \\ m \neq j}} \frac{K_{jm}^{(1)}(x_1, x_1)}{P_1(x_1, x_1)} - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j=1}^2 \beta_{ij}^{(2)}(x_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_m} \Big|_{\substack{x_2=\gamma_2(x_1) \\ m \neq j}} \frac{K_{jm}^{(2)}(x_1, x_1)}{P_2(x_1, x_1)} \right] \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \dots = \\ & = \int_a^b \frac{dx_1}{2\pi |x_1 - \xi_1| \cos(v_{x'}, x_2)} \times \\ & \quad \times \left[ \beta_{i2}^{(1)}(x_1) \frac{K_{21}^{(1)}(x_1, x_1)}{P_1(x_1, x_1)} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_1} \Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)} - \beta_{i2}^{(2)}(x_1) \frac{K_{21}^{(2)}(x_1, x_1)}{P_2(x_1, x_1)} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_1} \Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)} + \right. \\ & \quad \left. + \beta_{i1}^{(1)}(x_1) \frac{K_{12}^{(1)}(x_1, x_1)}{P_1(x_1, x_1)} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)} - \beta_{i1}^{(2)}(x_1) \frac{K_{12}^{(2)}(x_1, x_1)}{P_2(x_1, x_1)} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \right] + \dots \quad (30) \end{aligned}$$

Для регуляризации интеграла в правой части (30) поставим условия на коэффициенты  $\beta_{ij}^{(k)}(x')$ : приравняем коэффициенты при производных под знаком интеграла (30) к коэффициентам  $\alpha_{ij}^{(k)}(x_1)$  из граничных условий (2). Тогда мы получим систему уравнений для неизвестных  $\beta_{ij}^{(k)}(x_1)$ ,  $i, j = 1, 2$ , каждого  $k = 1, 2$ :

$$(-1)^{k+1} \beta_{im}^{(k)}(x_1) \frac{K_{mj}^{(k)}(x_1, x_1)}{P_k(x_1, x_1)} = \alpha_{ij}^{(k)}(x_1), \quad i, j, k = 1, 2; m \neq j. \quad (31)$$

Предположим, что неоднородная система (31) имеет единственное решение  $\beta_{11}^{(k)}(x_1), \beta_{12}^{(k)}(x_1), \beta_{21}^{(k)}(x_1), \beta_{22}^{(k)}(x_1)$ , для каждого  $k=1, 2$ . Тогда подставляя граничные условия (2) в (29), получаем:

$$\sum_{j=1}^2 \left( \beta_{ij}^{(1)}(\xi_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + \beta_{ij}^{(2)}(\xi_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} \right) =$$

$$= -\int_a^b \frac{1}{2\pi|x_1 - \xi_1|} \left[ \sum_{m=1}^2 \alpha_i^{(m)}(x_1) \tilde{u}(p, x_1, \gamma_m(x_1)) \right] \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \dots, i=1,2. \quad (32)$$

Подставляя 1-ое необходимое условие (26) для  $\tilde{u}(p, \xi')$  на  $\Gamma_k, k=1,2$ , в (32), мы имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \left( \beta_{ij}^{(1)}(\xi_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + \beta_{ij}^{(2)}(\xi_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} \right) = \\ & = -\int_a^b \frac{dx_1}{2\pi \cos(v_{x'}, x_2) |x_1 - \xi_1|} \left[ \sum_{m=1}^2 \alpha_i^{(m)}(x_1) \times \right. \\ & \left. \times (-1)^m \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \tilde{u}(p, \zeta') \Big|_{\zeta_2=\gamma_m(\zeta_1)} \frac{\cos(\zeta' - x', v_{\zeta'})}{|\zeta_1 - x_1| P_m(x_1, \zeta_1)} \frac{d\zeta_1}{\cos(v_{\zeta'}, \zeta_2)} \right] + \dots \quad (33) \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования в (33), получаем два регулярных соотношения ( $i=1,2$ ):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \left( \beta_{ij}^{(1)}(\xi') \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + \beta_{ij}^{(2)}(\xi') \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi')}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} \right) = \\ & = \int_a^b \frac{\tilde{u}(p, \zeta') \Big|_{\zeta_2=\gamma_k(\zeta_1)} d\zeta_1}{2\pi \cos(v_{\zeta'}, \zeta_2)} \int_a^b \sum_{m=1}^2 \left( \alpha_i^{(m)}(x_1) \frac{(\cos(\zeta' - x', v_{\zeta'})) \Big|_{\substack{\zeta_2=\gamma_m(\zeta') \\ \zeta_2=\gamma_m(x')}}}{2\pi |x_1 - \zeta_1| |x_1 - \xi_1| P_m(x_1, \zeta_1)} \right) \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \dots \quad (34) \end{aligned}$$

Внутренние интегралы в правой части (34) являются сингулярными, но они не содержат неизвестную функцию  $\tilde{u}(p, \xi')$  и сходятся в смысле Коши. Таким образом, мы регуляризовали соотношения (30) и, следовательно, нами установлена следующая

**Теорема 3.** Если система (31) имеет единственное решение  $\beta_{11}^{(k)}(x'), \beta_{12}^{(k)}(x'), \beta_{21}^{(k)}(x'), \beta_{22}^{(k)}(x')$ , для каждого  $k=1,2$ , и функции  $\beta_{ij}^{(k)}(x_1), i, k=1,2; j=1,2$ , удовлетворяют условию Гельдера, то соотношения (30) являются регулярными.

#### 4. Фредгольмовость

Из курса математического анализа известно, что

$$\frac{d}{dx_1} \tilde{u}(p, x_1, \gamma_k(x_1)) = \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_1} \Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} + \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\gamma_k(x')} \frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1}, k=1,2,$$

откуда мы имеем

$$\frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_1} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)} = \frac{d\tilde{u}(p, x_1, \gamma_k(x_1))}{dx_1} - \frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x')} \frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1}, k=1,2. \quad (35)$$

Так что производная  $\frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_1} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)}$  определяется через производную  $\frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_2} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)}$ . Тогда мы имеем только две неизвестные: граничные значения искомой функции  $u(x', \gamma_1(x'))$  и  $u(x', \gamma_2(x'))$ .

Подставим теперь выражения для  $\frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_1} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)}$  из (35) в левые части граничных условий (5):

$$\begin{aligned} l_i \tilde{u} &\equiv \sum_{k=1}^2 \alpha_{i1}^{(k)}(x_1) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)} + \sum_{k=1}^2 \alpha_{i2}^{(k)}(x_1) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)} + \\ &\quad \sum_{k=1}^2 \alpha_i^{(k)}(x_1) \tilde{u}(p, x_1, \gamma_k(x_1)) = \\ &= \sum_{k=1}^2 \alpha_{i1}^{(k)}(x_1) \left\{ \frac{d\tilde{u}(p, x_1, \gamma_k(x_1))}{dx_1} - \frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x')} \frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1} \right\} + \sum_{k=1}^2 \alpha_{i2}^{(k)}(x_1) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \alpha_i^{(k)}(x_1) \tilde{u}(p, x_1, \gamma_k(x_1)) = \\ &= \sum_{k=1}^2 \alpha_{i1}^{(k)}(x_1) \frac{d\tilde{u}(p, x_1, \gamma_k(x_1))}{dx_1} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2} \Big|_{x_2 = \gamma_k(x_1)} \left[ \alpha_{i2}^{(k)}(x_1) - \alpha_{i1}^{(k)}(x_1) \frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1} \right] + \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \alpha_i^{(k)}(x_1) \tilde{u}(p, x_1, \gamma_k(x_1)) = 0, \quad x_1 \in [a, b], \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (36)$$

Введем обозначения:

$$A_{ik}(x_1) = \alpha_{i2}^{(k)}(x_1) - \alpha_{i1}^{(k)}(x_1) \frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1}, \quad i, k = 1, 2.$$

Тогда система (36) будет переписана в виде:

$$A_{i1}(x_1) \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_2 = \gamma_1(x_1)} + A_{i2}(x_1) \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_2 = \gamma_2(x_1)} = F_i(x_1), \quad i = 1, 2, \quad (37)$$

где правые части системы (37) имеют вид:

$$\begin{aligned} F_i(x_1) &= - \sum_{k=1}^2 \alpha_{i1}^{(k)}(x_1) \frac{d\tilde{u}(p, x_1, \gamma_k(x_1))}{dx_1} + \\ &\quad - \alpha_i^{(1)}(x_1) \tilde{u}(p, x_1, \gamma_1(x')) - \alpha_i^{(2)}(x_1) \tilde{u}(p, x_1, \gamma_2(x')), \end{aligned} \quad (38)$$

$$x_1 \in [a, b], \quad i = 1, 2.$$

Мы приведем систему (37) к нормальному виду. Для этого мы требуем, чтобы определитель системы был не равен нулю:

$$\Delta(x_1) = \begin{vmatrix} A_{11}(x_1) & A_{12}(x_1) \\ A_{21}(x_1) & A_{22}(x_1) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (39)$$

Если коэффициенты  $\alpha_{ij}^{(k)}(x_1)$ ,  $i, j, k = 1, 2$ , и уравнения границ  $\gamma_1(x_1)$  и  $\gamma_2(x_1)$  удовлетворяют условию (39), тогда по формулам Крамера имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)} &= \frac{1}{\Delta(x_1)} \begin{vmatrix} F_1(x_1) & A_{12}(x_1) \\ F_2(x_1) & A_{22}(x_1) \end{vmatrix}, \\ \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)} &= \frac{1}{\Delta(x_1)} \begin{vmatrix} A_{11}(x_1) & F_1(x_1) \\ A_{21}(x_1) & F_2(x_1) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

Так как определитель  $\Delta(x_1)$  не зависит от неизвестной функции и ее производных, а  $F_i(x_1)$  лишь от граничных значений неизвестной функции

$\tilde{u}(p, x_1, \gamma_k(x_1)) = \tilde{u}|_{\Gamma_k}$ ,  $k = 1, 2$ , и их производных  $\frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_k}}{dx_1}$  ( $k=1, 2$ ), то решение (40) линейной системы (37) имеет форму линейного функционала:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} &= \Phi_k(\tilde{u}|_{\Gamma_1}, \tilde{u}|_{\Gamma_2}, \frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_1}}{dx_1}, \frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_2}}{dx_1}) = \\ &= \sum_{i=1}^2 a_i^{(k)}(x_1) \tilde{u}|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^2 b_i^{(k)}(x_1) \frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_i}}{dx_1} + \sum_{i=1}^2 \int_a^b c_i^{(k)}(\zeta_1) \tilde{u}|_{\Gamma_i} d\zeta_1 + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_s d_i^{(k)}(\zeta_1) \frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1} d\zeta_1, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (41)$$

Вернемся к регуляризованным граничным условиям (34) и подставим в них выражения (35) для производных  $\frac{\partial \tilde{u}(p, x')}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}$ ,  $k = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^2 \left( \beta_{ij}^{(1)}(\xi^1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi^1)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + \beta_{ij}^{(2)}(\xi^1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi^1)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^2 \beta_{i1}^{(k)}(\xi^1) \left[ \frac{d\tilde{u}(p, \xi_1, \gamma_k(\xi_1))}{d\xi_1} - \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi^1)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)} \frac{d\gamma_k(\xi_1)}{d\xi_1} \right] + \\ &\quad \sum_{k=1}^2 \beta_{i2}^{(k)}(\xi^1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi^1)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)} = \end{aligned}$$



$$= \int_a^b \frac{\tilde{u}(p, \zeta') \Big|_{\zeta_2=\gamma_k(\zeta_1)}}{2\pi \cos(v_{\zeta'}, \zeta_2)} d\zeta_1 \int_a^b \sum_{m=1}^2 \left( \alpha_i^{(m)}(x_1) \frac{(\cos(\zeta'-x', v_{\zeta'})) \Big|_{\substack{\zeta_2=\gamma_m(\zeta') \\ x_2=\gamma_m(x')}}}{2\pi |x_1 - \zeta_1| |x_1 - \xi_1| P_m(x_1, \zeta_1)} \right) \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \dots$$

$i = 1, 2. \quad (42)$

Сгруппируем слагаемые и приведем соотношения (42) к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi_1)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} \left[ \beta_{i1}^{(1)}(\xi_1) \frac{d\gamma_1(\xi_1)}{d\xi_1} - \beta_{i2}^{(1)}(\xi_1) \right] + \\ & + \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi_1)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} \left[ \beta_{i1}^{(2)}(\xi_1) \frac{d\gamma_2(\xi_1)}{d\xi_1} - \beta_{i2}^{(2)}(\xi_1) \right] = \\ & = \beta_{i1}^{(1)}(\xi_1) \frac{d\tilde{u}(p, \xi_1, \gamma_1(\xi_1))}{d\xi_1} + \beta_{i1}^{(2)}(\xi_1) \frac{d\tilde{u}(p, \xi_1, \gamma_2(\xi_1))}{d\xi_1} + \\ & + \int_a^b \frac{\tilde{u}(p, \zeta') \Big|_{\zeta_2=\gamma_k(\zeta_1)}}{2\pi \cos(v_{\zeta'}, \zeta_2)} d\zeta_1 \int_a^b \sum_{m=1}^2 \left( \alpha_i^{(m)}(x_1) \frac{(\cos(\zeta'-x', v_{\zeta'})) \Big|_{\substack{\zeta_2=\gamma_m(\zeta') \\ x_2=\gamma_m(x')}}}{2\pi |x_1 - \zeta_1| |x_1 - \xi_1| P_m(x_1, \zeta_1)} \right) \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \dots \end{aligned}$$

$\xi' \in S, i = 1, 2. \quad (43)$

Слагаемые в (43) - либо со слабо сингулярным либо с регулярным ядром.

Тогда получаем систему

$$C_{i1}(\xi_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi_1)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + C_{i2}(\xi_1) \frac{\partial \tilde{u}(p, \xi_1)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} = B_i(\xi_1), \quad i = 1, 2, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi_1) &= \beta_{ij}^{(1)}(\xi_1) \frac{d\gamma_1(\xi_1)}{d\xi_1} - \beta_{ij}^{(1)}(\xi_1), \quad i, j = 1, 2, \\ B_i(\xi_1) &= \sum_{k=1}^2 \beta_{i1}^{(k)}(\xi_1) \frac{d\tilde{u}(p, \xi_1, \gamma_k(\xi_1))}{d\xi_1} + \\ & + \int_a^b \frac{\tilde{u}(p, \zeta') \Big|_{\zeta_2=\gamma_k(\zeta_1)}}{2\pi \cos(v_{\zeta'}, \zeta_2)} d\zeta_1 \int_a^b \sum_{m=1}^2 \left( \alpha_i^{(m)}(x_1) \frac{(\cos(\zeta'-x', v_{\zeta'})) \Big|_{\substack{\zeta_2=\gamma_m(\zeta') \\ x_2=\gamma_m(x')}}}{2\pi |x_1 - \zeta_1| |x_1 - \xi_1| P_m(x_1, \zeta_1)} \right) \frac{dx_1}{\cos(v_{x'}, x_2)} + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Так как в многочлене в (45) входят слагаемые интегралы, содержащие производные  $\frac{\partial \tilde{u}(p, \xi_1)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}, k = 1, 2$ , под интегралом, а также гранич-

ные значения  $\tilde{u}|_{\Gamma_k} = \tilde{u}(p, \xi_1, \gamma_k(\xi_1))$  искомого решения  $\tilde{u}(p, \xi')$  на поверхностях  $\Gamma_k, k=1,2$ , и производные граничных значений  $\frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_k}}{d\xi_1} = \frac{d\tilde{u}(p, \xi_1, \gamma_k(\xi_1))}{d\xi_1}$ ,  $k=1,2$ , то правые части  $B_k, k=1,2$ , (45) являются линейными функционалами от этих функций и, учитывая (41) имеют вид:

$$\begin{aligned} B_k &= B_k \left( \tilde{u}|_{\Gamma_1}, \tilde{u}|_{\Gamma_2}, \frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_1}}{dx_1}, \frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_2}}{dx_1}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2}|_{\Gamma_1}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_2}|_{\Gamma_2} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^2 a_i^{(l)}(\xi_1) \tilde{u}|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^2 b_i^{(l)}(\xi_1) \frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_i}}{d\xi_1} + \sum_{i=1}^2 \int_a^b c_i^{(l)}(\zeta_1) \tilde{u}|_{\Gamma_i} d\zeta_1 + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_a^b d_i^{(l)}(\zeta_1) \frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1} d\zeta_1 + \varphi_l(\xi_1), \quad l=3,4. \end{aligned} \quad (46)$$

Подставляя выражения (41) для  $\frac{\partial \tilde{u}(p, \xi_1)}{\partial \xi_2}|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}$ ,  $k=1,2$ , и (46) в систему (44), мы пришли к 2-мерной системе линейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^2 A_i^{(k)}(\xi_1) \tilde{u}|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^2 B_i^{(k)}(\xi_1) \frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_i}}{d\xi_1} + \sum_{i=1}^2 \int_a^b C_i^{(k)}(\zeta_1) \tilde{u}|_{\Gamma_i} d\zeta_1 + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_a^b D_i^{(k)}(\zeta_1) \frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1} d\zeta_1 + g_k(\xi_1) = 0, \quad k=1,2. \end{aligned} \quad (47)$$

Приведем систему (47) к нормальному виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_k}}{d\xi_1} &= \sum_{i=1}^2 P_i^{(k)}(\xi_1) \tilde{u}|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^2 \int_a^b R_i^{(k)}(\zeta_1) \tilde{u}|_{\Gamma_i} d\zeta_1 + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_a^b T_i^{(k)}(\zeta_1) \frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1} d\zeta_1 + G_k(\xi_1) = 0, \quad k=1,2, \end{aligned} \quad (48)$$

при условии, что

$$\begin{vmatrix} B_1^{(1)}(\xi_1) & B_2^{(1)}(\xi_1) \\ B_1^{(2)}(\xi_1) & B_2^{(2)}(\xi_1) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (49)$$

Проинтегрируем по частям интеграл от  $\frac{d\tilde{u}|_{\Gamma_i}}{d\xi_1}$  в левой части (48), учитывая граничное значение (5'):

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}}{d\xi_1}\Big|_{\Gamma_k} &= \sum_{i=1}^2 P_i^{(k)}(\xi_1)\tilde{u}\Big|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^2 \int_a^b \left[ R_i^{(k)}(\zeta_1) - \frac{dT_i^{(k)}(\zeta_1)}{d\zeta_1} \right] \tilde{u}\Big|_{\Gamma_i} d\zeta_1 + \\ &+ \sum_{i=1}^2 T_i^{(k)}(t)\tilde{u}(t, \gamma_i(t), p)\Big|_a^b + G_k(\xi_1) = 0, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (50)$$

Проинтегрируем (50) от  $a$  до  $\xi_1$ , учитывая граничное значение (5’):

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi_1, \gamma_k(\xi_1), p) &= \tilde{u}(a, \gamma_k(a), p) + \sum_{i=1}^2 \int_a^{\xi_1} P_i^{(k)}(t)\tilde{u}\Big|_{\Gamma_i} dt + \sum_{i=1}^2 \int_a^{\xi_1} \int_a^b \left[ R_i^{(k)}(\zeta_1) - \frac{dT_i^{(k)}(\zeta_1)}{d\zeta_1} \right] \tilde{u}\Big|_{\Gamma_i} d\zeta_1 dt + \\ &+ E_k(\xi_1) = 0, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

или

$$\tilde{u}\Big|_{\Gamma_k} = \sum_{i=1}^2 \int_a^{\xi_1} P_i^{(k)}(t)\tilde{u}\Big|_{\Gamma_i} dt + \sum_{i=1}^2 \int_a^{\xi_1} \int_a^b V(\zeta_1)\tilde{u}\Big|_{\Gamma_i} d\zeta_1 dt + H_k(\xi_1) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (51)$$

Преобразуем (51) к виду:

$$\begin{aligned} &\tilde{u}(\xi_1, \gamma_k(\xi_1), p) = \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_a^b \theta(\xi_1 - t) P_i^{(k)}(t)\tilde{u}(t, \gamma_k(t), p) dt + \sum_{i=1}^2 \int_a^b \tilde{u}(t, \gamma_k(t), p) V_i^{(k)}(t)(\xi_1 - a) dt + H_k(\xi_1) = \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_a^b \left\{ \theta(\xi_1 - t) P_i^{(k)}(t) + V_i^{(k)}(t)(\xi_1 - a) \right\} \tilde{u}(t, \gamma_k(t), p) dt, \quad \xi_1 \in [a, b], \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (52)$$

Итак, мы пришли к 2-мерной системе линейных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода (52) с граничными условиями Дирихле (5’) на границе одномерной области  $[a, b]$ . Так как эта граница меры нуль, то это условие Дирихле не ограничивает общности.

Таким образом, нами установлена

**Теорема 4.** При выполнении условий теоремы 3, если справедливы условия (39) и (49), то краевая задача (4)-(5) сводится к двумерной системе линейных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода (50), к которой примыкает условие Дирихле (5’).

Таким образом, установлена следующая

**Теорема 5.** При условиях теоремы 4 с учетом ограничения (5’) краевая задача (4), (5) является Фредгольмовой.

Путем обратного преобразования Лапласа получаем решение  $u(x)$  исходной задачи (1)-(3).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалевская С.В. К теории уравнений в частных производных. Научные статьи. М.-Л.: АН СССР, 1948, 380 с.
2. Levi H. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. Ann.Math., 1957, vol.66, №2, pp.155-158.
3. Hörmander L. Differential operators of principal type, Math. Ann., 140, 124-146, 1960.

4. Hörmander L. Differential equations without solution, Math. Ann., 140, 169-173, 1960.
5. Lebesgue H. Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet. Bull. Soc. Math. 17, 913, pp. 48-50.
6. Lebesgue H. Observation au sujet de la note de N. Wiener - Conditions de régularité, conditions de régularité, conditions d'impossibilité, le problème de Dirichlet - Compt. Rend. De l'Acad., des. de Paris, 178, 1924, pp. 349-354.
7. Wiener N. The Dirichlet problem, J. Math. And Phys., 1924, №3, pp. 123-146.
8. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М., 1984, Наука, 359 с.
9. Новрузов А.А. Об одном критерии регулярности граничных точек для линейных и квазилинейных параболических уравнений, Докл. АН СССР, т. 209, № 4, 1973, сс. 785-787.
10. Мамедов И.Г. О регулярности граничных точек для линейных параболических уравнений. Мат. заметки, т. 20, № 5, 1976, сс. 717-723.
11. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966, 203 с.
12. Monika-Ramona Costache (Supervised Prof. Dr. Heinrich Begehr) Basic Boundary Value Problems for the Cauchy-Riemann and the Poisson Equation in a Quarter Diss (Master thesis) June 19, 2009.
13. Begehr H. and Gaertner E. A Dirichlet problem for the inhomogeneous polyharmonic equation in the upper half plane, Geom. Math. J., 2007, vol. 14, N 1, p. 33-51.
14. Begehr H. Boundary value problems in complex analysis I. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Vol. XII, N1, 2005, pp. 65-85.
15. Дезин А.А. Общие вопросы краевых задач. М.: Наука, 1980, 207 с.
16. Алиев Н.А. Исследование решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с общими линейными граничными условиями. Докт. диссерт., Баку, 2011, 270 с.
17. Aliev N.A. and Hosseini S.M. A regularization of Fredholm type singular integral equations, I. J. of Math. and Math Sciences, 26 (2001) №2, p. 123-128.
18. Aliev N.A. and Hosseini S.M. Multidimensional singular Fredholm integral equations in a finite domain and their regularization, South East Asian Bulletin Mathematics, 27, 2003, №3, 395-408.
19. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976, 480 с.

## **QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ OLAN ÜÇÖLÇÜLÜ HİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN QOYULMUŞ MƏSƏLƏNİN HƏLLİ**

**N.Ə.ƏLİYEV, Y.YU. MUSTAFAYEVA**

### **XÜLASƏ**

Təqdim olunan məqalə qeyri-lokal sərhəd şərtləri olan üçölçülü dalğa tənliyi üçün qarışıq məsələnin həllinin araşdırılmasına həsr olunmuşdur. Laplas çevrilməsindən sonra, yaranan qarışıq məsələ Helmholtz tənliyi üçün qeyri-lokal sərhəd şərtləri ilə ikiölçülü bir sərhəd dəyər məsələsinə çevrilir. Alınan sərhəd məsələsinin Fredholm xassəsinin şərtləri müəyyənləşdirilir. Məsələsinin həll olunması orijinal üsulla təsdiqlənir.

**Açar sözlər** Üçölçülü hiperbolik tənlik, qeyri-lokal sərhəd şərtləri, Laplas çevrilməsi, fundamental həllər, zəruri şərtlər, requlyarizasiya, Fredholm xassəsi.

# SOLVABILITY OF NONLOCAL BOUNDARY PROBLEM FOR THREE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION

N.A.ALIEV, Y.Yu.MUSTAFAYEVA

## SUMMARY

The present paper is devoted to the study of the solution of a mixed problem for a three-dimensional wave equation with nonlocal boundary conditions. After the Laplace transform, the posed mixed problem reduces to a two-dimensional boundary-value problem with nonlocal boundary conditions for the Helmholtz equation. The conditions of the Fredholm property of the obtained boundary problem are established. The solvability of the problem is proved by the original method.

**Keywords.** Three-dimensional hyperbolic equation, nonlocal boundary conditions, Laplace transform, fundamental solutions, necessary conditions, regularization, Fredholm property.

*Поступила в редакцию: 16.04.2019 г.*

*Подписано к печати: 28.12.2019 г.*

УДК 65Н04

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ  
ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э.А.ГАСЫМОВ

*Бакинский Государственный Университет*  
*gasymov-elmagha@rambler.ru*

*В настоящей работе получают асимптотические представления корней некоторых трансцендентных уравнений и указываются некоторые оценки. Строятся последовательность расширяющихся замкнутых гладких контуров типа окружности, включенных друг в друга и по этим контурам получают подходящие равномерные оценки снизу для модулей функции, входящие в рассматриваемое трансцендентное уравнение. Результаты работы могут быть использованы при решении некоторых смешанных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с нерегулярными граничными условиями [3].*

**Ключевые слова.** Трансцендентные уравнения, асимптотическое решение, оценка снизу.

**Постановка задачи.** Найти асимптотические представления корней уравнений

$$\Delta_1(\lambda) \equiv e^{i\lambda a} + q_1(\lambda) = 0, \quad |\lambda| \geq R, \quad (1.1)$$

и

$$\Delta_2(\lambda) \equiv e^{a\lambda} + \frac{1}{q_2(\lambda)} = 0, \quad |\lambda| \geq R, \quad (1.2)$$

где  $q_1(\lambda) = \beta\lambda + \gamma + \frac{E(\lambda)}{\lambda}$ ,  $q_2(\lambda) = i\beta\lambda + \gamma + \frac{E(\lambda)}{\lambda}$ ;  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ ,  $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ ,  $a(a > 0)$ ,  $\beta_k, \gamma_k$   $R$ -некоторые вещественные числа,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\lambda$  – комплексное число. Здесь и в дальнейшем через  $E(\lambda)$  обозначаются различные функции (конкретные выражения которых не важны) определенные в области  $|\lambda| \geq R$ , для которых  $|E(\lambda)| \leq const$ , при  $|\lambda| \geq R$ , где  $R$  – достаточно большое положительное число.

<sup>1</sup>0. Пусть  $a > 0$  и  $\beta \neq 0$ .

Положим

$$x_{1m}^0 = (2m+1)\frac{\pi}{a} + \frac{\theta}{a} - \frac{1}{(2m+1)a\pi} \ln \left( \frac{|\beta|}{a} (2m+1)\pi \right) + \frac{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}{|\beta|^2(2m+1)\pi};$$

$$y_{1m}^0 = -\frac{1}{a} \ln \left( \frac{|\beta|}{a} (2m+1)\pi \right) - \frac{1}{(2m+1)\pi} \left[ \frac{\theta}{a} + \frac{\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2}{|\beta|^2} \right];$$

$$x_{2m}^0 = -\frac{2m\pi}{a} + \frac{\theta}{a} + \frac{1}{2m\pi} \ln \left( \frac{2|\beta|m\pi}{a} \right) - \frac{1}{2\pi m} \frac{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}{|\beta|^2};$$

$$y_{2m}^0 = -\frac{1}{a} \ln \left( \frac{2|\beta|m\pi}{a} \right) + \frac{1}{2\pi m} \cdot \left[ \frac{\theta}{a} + \frac{\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2}{|\beta|^2} \right];$$

$$\theta = \arg \beta, \quad \text{т.е. } \cos \theta = \frac{\beta_1}{|\beta|}, \quad \sin \theta = \frac{\beta_2}{|\beta|},$$

$$\lambda_{jm}^{(1,0)} = x_{jm}^0 + iy_{jm}^0,$$

$$\lambda_{jm}^{(2,0)} = y_{jm}^0 - ix_{jm}^0. \quad (2)$$

Пользуясь [1], [2] доказывается следующая

**Теорема 1.** При ограничениях  $I^0$ , уравнения (1.к) ( $k=1,2$ ) в комплексной плоскости имеют, соответственно, две группы счетных множеств нулей  $\{\lambda_{jm}^{(k)}\}_{m=1}^{\infty}$ , ( $j=1,2$ ), для которых единственной предельной точкой является  $\lambda = \infty$ . Эти корни при достаточно больших  $m$  допускают асимптотические представления

$$\lambda_{jm}^{(k)} = \lambda_{jm}^{(k,0)} + o\left(\frac{1}{m \ln m}\right), \quad (m \rightarrow +\infty), \quad j=1,2, \quad (3)$$

где  $\lambda_{jm}^{(k,0)}$  из (2).

Положим

$$\Omega_{Rh}^{(1,j)} = \left\{ \lambda : (-1)^j \operatorname{Re} \lambda < 0, \operatorname{Im} \lambda < 0, \left| \operatorname{Im} \lambda + \frac{1}{a} \ln |\beta \lambda| \right| \leq h, |\lambda| \geq R \right\},$$

$$\Omega_{Rh}^{(2,j)} = \left\{ \lambda : (-1)^j \operatorname{Im} \lambda < 0, \operatorname{Re} \lambda < 0, \left| \operatorname{Re} \lambda + \frac{1}{a} \ln |\beta \lambda| \right| \leq h, |\lambda| \geq R \right\},$$

$$\Omega_{Rh}^{(k)} = \bigcup_{j=1}^2 \Omega_{Rh}^{(k,j)}.$$

Прямые

$$I_m^{(1,1)} = \left\{ \lambda : \operatorname{Re} \lambda = \frac{2\pi m}{a} + \frac{\theta}{a} \right\},$$

$$l_m^{(1,2)} = \left\{ \lambda : \operatorname{Re} \lambda = -\frac{2\pi n}{a} + \frac{\theta}{a} + \frac{\pi}{a} \right\},$$

$$m = N_0, N_0 + 1, \dots,$$

( $N_0$  – достаточно большое натуральное число), разбивают область  $\Omega_{Rh}^{(1,j)}$  на криволинейные четырехугольники  $T_m^{(1,j)} = T_m^{(1,j)}(R, h)$  с боковыми границами, лежащими на прямых  $l_m^{(1,j)}$  и  $l_{m+1}^{(1,j)}$  основаниями

$$\operatorname{Im} \lambda = -\frac{1}{a} \ln |\beta \lambda| + h,$$

$$\operatorname{Im} \lambda = -\frac{1}{a} \ln |\beta \lambda| - h,$$

а прямые

$$l_m^{(2,1)} = \left\{ \lambda : \operatorname{Im} \lambda = -\frac{2m\pi}{a} - \frac{\theta}{a} \right\},$$

$$l_m^{(2,2)} = \left\{ \lambda : \operatorname{Im} \lambda = \frac{2m\pi}{a} - \frac{\theta}{a} + \frac{\pi}{a} \right\},$$

разбивают области  $\Omega_{Rh}^{(2,j)}$  на криволинейные четырехугольники  $T_m^{(2,j)} = T_m^{(2,j)}(R, h)$  с основаниями, лежащими на прямых  $l_m^{(2,j)}$  и  $l_{m+1}^{(2,j)}$  и боковыми границами

$$\operatorname{Re} \lambda = -\frac{1}{a} \ln |\beta \lambda| + h,$$

$$\operatorname{Re} \lambda = -\frac{1}{a} \ln |\beta \lambda| - h.$$

Длину диагонали четырехугольника  $T_m^{(k,j)}$  обозначим через  $d_m^{(k,j)}$ :

$$d_m^{(k,j)} = \sup_{\lambda, z \in T_m^{(k,j)}} |\lambda - z|.$$

Имеет место

**Лемма 1.** При ограничениях  $l^0$ , при фиксированном  $R$  и  $h$  последовательность  $d_m^{(k,j)}$  ограничена, т.е.

$$d_m^{(k,j)} \leq d, \quad (j=1,2), \quad (k=1,2), \quad m = N_0, N_0 + 1, \dots,$$

где  $d = d(R, h)$ , некоторое положительное число.

Положим ( $[*]$  – целый часть  $*$ ),

$$S_0 = 1 + \left[ \frac{ad}{2\pi} \right],$$

$$z_{1\nu} = \frac{2\nu\pi}{a}, \quad z_{2\nu} = \frac{2\nu\pi}{a} i,$$



$$\begin{aligned}
\eta_{mj}^{(k,v)} &= \lambda_{jm}^{(k,0)} + z_{kv}, \\
T_m^{(k,j,\delta)} &= T_m^{(k,j)} \setminus \bigcup_{|v| \leq S_0} S_\delta(\eta_{mj}^{(k,v)}), \\
S_\delta(z_0) &= \{\lambda : |\lambda - z_0| < \delta\}, \\
\Omega_{1Rh} &= \left\{ \lambda : |\lambda| \geq R, \operatorname{Im} \lambda \leq -h - \frac{1}{a} \ln |\beta \lambda| \right\} \cup \left\{ \lambda : |\lambda| \geq R, \operatorname{Im} \lambda \geq h - \frac{1}{a} \ln |\beta \lambda| \right\}, \\
\Omega_{2Rh} &= \left\{ \lambda : |\lambda| \geq R, \operatorname{Re} \lambda \leq -h - \frac{1}{a} \ln |\beta \lambda| \right\} \cup \left\{ \lambda : |\lambda| \geq R, \operatorname{Re} \lambda \geq h - \frac{1}{a} \ln |\beta \lambda| \right\}, \\
\Omega_{k\delta} &= \left\{ \lambda : [|\lambda| \leq d] \setminus \bigcup_{|v| \leq S_0} S_\delta(z_{kv}) \right\}, \\
\varphi_1(\lambda) &= e^{ia\lambda} - 1, \quad \varphi_2(\lambda) = e^{-a\lambda} - 1.
\end{aligned}$$

Обозначим через  $\chi_{k\delta}$  и  $M_{k\delta}$  минимум и максимум функции  $|\varphi_k(\lambda)|$  в области  $\Omega_{k\delta}$  соответственно.

Пользуясь результатами леммы 1 доказывается следующая

**Лемма 2.** При ограничениях  $I^0$ , существуют такие достаточно большие числа  $R, h, N_0$  и достаточно малое число  $\delta (\delta > 0)$  и такое положительное число  $\alpha_0$  что при  $k=1,2$  имеют место следующие утверждения:

$$\begin{aligned}
|\lambda_{jm}^{(k)}| < |\lambda_{jm+1}^{(k)}| < \dots, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |\lambda_{jm}^{(k)}| = \infty; \\
|\lambda_{jm}^{(k)} - \lambda_{jm}^{(k,0)}| < \delta/2; \quad |\lambda_{jm}^{(k)} - \lambda_{jl}^{(k)}| > \frac{2\pi}{a} - \alpha_0, \quad |\lambda_{jm}^{(k,0)} - \lambda_{jl}^{(k,0)}| > \frac{2\pi}{a} - \alpha_0,
\end{aligned}$$

при  $m \neq l, m, l \geq N_0$ ;

$$\begin{aligned}
\bar{S}_\delta(\lambda_{jm}^{(k)}), \quad \bar{S}_\delta(\lambda_{jm}^{(k,0)}) &\subset \Omega_{Rh}^{(k,j)}; \\
\bar{S}_\delta(\lambda_{jm}^{(k,0)}) \cap \bar{S}_\delta(\lambda_{jl}^{(k,0)}) &= \phi, \quad (\phi - \text{пустое множество}), \\
\bar{S}_\delta(\lambda_{jm}^{(k)}) \cap \bar{S}_\delta(\lambda_{jl}^{(k)}) &= \phi, \quad \text{при } m \neq l; \\
S_\delta(\lambda_{jm}^{(k,0)}) \subset T_m^{(k,j)}, \quad S_\delta(\lambda_{jm}^{(k)}) &\subset T_m^{(k,j)}; \\
\bar{S}_\delta(\lambda_{jl}^{(k,0)}) \cap T_m^{(k,j)} &= \phi \\
\bar{S}_\delta(\lambda_{jl}^{(k)}) \cap T_m^{(k,j)} &= \phi, \quad \text{при } m \neq l.
\end{aligned}$$

Используясь утверждениями теоремы и леммами 1 и 2 доказывается следующая

**Теорема 2.** При ограничениях  $I^0$ , существуют достаточно большие числа  $R, h, N_0$  и достаточно малое число  $\delta (\delta > 0)$  и некоторое положительное число  $\alpha_0 (\alpha_0 > 0)$ , что

i) при  $t \geq N_0$  множества  $T_m^{(k,j,\delta)}$  непустые, односвязные, замкнутые, ограниченные области;

ii) имеют место неравенства

$$2M_{1\delta} \geq \left| \frac{1}{q_1(x)} \Delta_1(\lambda) \right| \geq \frac{1}{2} \chi_{1\delta} > 0,$$

$$2M_{1\delta} \geq \left| \bar{e}^{i\lambda a} \Delta_1(\lambda) \right| \geq \frac{1}{2} \chi_{1\delta}, \text{ при } \lambda \in T_m^{(1,j,\delta)};$$

$$\left| \frac{1}{q_1(\lambda)} \Delta_1(\lambda) \right| \geq \alpha_0,$$

$$\left| \bar{e}^{i\lambda a} \Delta_1(\lambda) \right| \geq \alpha_0, \text{ при } \lambda \in \Omega_{1Rh};$$

$$2M_{2\delta} \geq \left| \bar{e}^{a\lambda} \Delta_2(\lambda) \right| \geq \frac{1}{2} \chi_{2\delta} > 0,$$

$$2M_{2\delta} \geq \left| q_2(\lambda) \Delta_2(\lambda) \right| \geq \frac{1}{2} \chi_{2\delta}, \text{ при } \lambda \in T_m^{(2,j,\delta)};$$

$$\left| \bar{e}^{a\lambda} \Delta_2(\lambda) \right| \geq \alpha_0,$$

$$\left| q_2(\lambda) \Delta_2(\lambda) \right| \geq \alpha_0, \text{ при } \lambda \in \Omega_{2Rh}.$$

Существуют последовательности типа окружности замкнутых расширяющихся контуров  $\Gamma_v^{(k)}$  (включенные друг в друга) с радиусами  $R_v^{(k)}$  и центрами в начале координат что

i)  $R < R_1^{(k)} < R_2^{(k)} < \dots, \lim_{v \rightarrow \infty} R_v^{(k)} = \infty,$

ii) имеют место неравенства

$$\left| \frac{1}{q_1(\lambda)} \Delta_1(\lambda) \right| \geq \alpha_0,$$

$$\left| \bar{e}^{i\lambda a} \Delta_1(\lambda) \right| \geq \alpha_0, \text{ при } \lambda \in \Gamma_v^{(1)};$$

$$\left| q_2(\lambda) \Delta_2(\lambda) \right| \geq \alpha_0,$$

$$\left| \bar{e}^{a\lambda} \Delta_2(\lambda) \right| \geq \alpha_0, \text{ при } \lambda \in \Gamma_v^{(2)}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Гостехиздат, 1951.
2. Qasimov E.A. Elementar riyaзиyyat kursunun elmi əsasları. Bakı: Elm, 2016, 498 s.
3. Гасымов Э.А. Метод конечного интегрального преобразования и его приложения. Баку: Элм, 2009, 432 с.

# BƏZİ TRANSCENDENT TƏNLİKLƏRİN ASİMPTOTİK HƏLL ÜSULLARI

E.A.QASIMOV

## XÜLASƏ

Məqalədə bəzi transcendent tənliklərin köklərinin asimptotik ifadələri alınır və müəyyən qiymətləndirmələr göstərilir. Bir-birinə daxil olan genişlənən qapalı çevrəvari hamar konturlar ardıcılığı qurulur və bu konturlar üzrə baxılan tənliklərə daxil olan transcendent funksiyaların mütləq qiymətləri üçün aşağıdan müntəzəm qiymətləndirmələr alınır. Alınmış nəticələrdən xüsusi törəmli diferensial tənliklər üçün qeyri-requlyar sərhəd şərtli qarışıq məsələlərin həllində istifadə etmək olar [3].

**Açar sözlər:** transcendent tənliklər, asimptotik həll, aşağıdan qiymətləndirmə.

# ASYMPTOTIK METHODS FOR SOLVING SOME TRANSCENDENTAL EQUATIONS

E.A.GASYMOV

## SUMMARY

In the paper we obtain asymptotic representations of the roots of some transcendental equations and give some estimations. We constant a sequense of examding cricle type closed smooth contours of included to each other and obtain along these contous appropriate uniform lower bounds for the modulus of functions included in the considered transcendental equition. The results of the paper may be used when solving some mixed problems for partial differential equations with irregular boundary conditions [3].

**Keywords:** transcendental equations, asymptotic solution, lower bounds.

*Поступила в редакцию: 14.10.2019 г.*

*Подписано к печати: 28.12.2019 г.*

УДК 517.958

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
К ЧИСЛЕННОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ  
ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА НА РЕШЕТКЕ ПРОЗРАЧНЫХ  
КРУГОВЫХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ**

**Ф.М.ГАСАНОВ**

*Бакинский Государственный Университет*  
*feyruz.hasanov@inbox.ru*

*В работе с применением метода интегральных уравнений численно исследуются задачи дифракции точечного источника в дальней зоне на структуре прозрачных периодических цилиндров, поперечные сечения которых есть круг и эллипс.*

**Ключевые слова:** Уравнения Гельмгольца, дискретное преобразование Фурье, интегральное уравнение, формула Грина, задача дифракции, диаграмма направленности.

Решение задачи дифракции электромагнитной волны на периодической прозрачной решетке имеет важное значение для расчета многих устройств, применяемых на практике.

Нас будет интересовать “резонансный” случай, когда длина волны по величине сравнима с периодом решетки, а также сравнима с толщиной неоднородного слоя. В этом случае, решение может быть получено, как правило, только численными методами. Более сложной является задача о возбуждении периодической решетки точечного источника (к такой задаче очевидным образом приводится задача о возбуждении распределенным источником с финитной плотностью).

Здесь необходимо рассматривать уже поле во всем пространстве. Метод решения таких задач с применением метода интегральных уравнений был предложен в [1]. Метод интегральных уравнений позволяет получить исчерпывающую информацию о дифракционном поле. Она позволяет исследовать поле на поверхности тела (токи), поля в ближней зоне и интегральные характеристики полей в дальней зоне.

Рассмотрим задачу о дифракции поля точечного источника на бесконечной прозрачной периодической структуре с периодом  $a$ , образованной параллельным переносом цилиндра сечениями  $D_i$ , ограниченного контуром  $\Sigma$ , вдоль оси  $Ox$ . Для определенности рассмотрим электромаг-

нитное поле, имеющее компоненты  $E_y, H_x$  и  $H_z$ , т.е. E- поляризации.

Задача о дифракции на бесконечной прозрачной структуре, возбужденной точечным источником, сводится к отысканию решения уравнения Гельмгольца

$$\Delta_{x,z}u(x, z) + K^2(M)u(x, z) = -2\pi\delta(M_0, M_0) \quad (1)$$

во всем пространстве  $D_i - D_e$  с условиями непрерывности на  $\Sigma$

$$u_i = u_e, \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e \quad (2)$$

и условиями излучения, исключающими волны, приходящие из бесконечности.

Здесь  $u = E_y, D_e$ - дополняет  $D_i$  до полного пространства, а

$$K^2(M) = \begin{cases} k_i^2, M \in D_i \\ k_e^2, M \in D_e \end{cases}, k_i^2 \neq k_e^2$$

и  $\bar{n}$ - внутренняя нормаль к области  $D_i$ .

Как показано в [1], в силу дискретного преобразования Фурье

$$V(t, x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(x + na, z)e^{-int}$$

математическая задача дифракции в данном случае сводится к определению в полосе

$$D: \left\{ -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\infty < z < +\infty \right\}$$

решения уравнения

$$\begin{aligned} &\Delta_{x,z}V(t, M) + K^2(M)V(t, M) = \\ &= -2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0 + na)\delta(z - z_0)e^{-int} \end{aligned} \quad (3)$$

с условиями непрерывности на контуре  $\Sigma$

$$V_i = V_e, \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e \quad (4)$$

и условиями излучения на бесконечности. Функция  $V(t, x, z)$  удовлетворяет условию Флоке с параметром  $t$  при  $x = 0, a$ :

$$V(t, x + a, z) = e^t V(t, x, z). \quad (5)$$

Решение исходной задачи  $u(x, z)$  выражается через функцию  $V(t, x, z)$  с помощью обратного преобразования

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(t, x, z) dt. \quad (6)$$

Таким образом, задача дифракции точечного источника на прозрачных периодических структурах сводится к определению решения уравнения (3) с условиями (4) и условиями излучения в полосе

$$D: \left\{ -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\infty < z < +\infty \right\}.$$

Условия излучения для данной задачи сформулируем следующим образом [2]: рассмотрим сечения полосы  $z_1$  и  $z_2$ , выделяющие область, содержащую точечный источник и тело  $D_i$ . Учитывая, что точечный источник находится справа от решетки, при  $z \leq z_1$  и  $z \geq z_2$  можно записать

$$V(t, x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(t) e^{-i\gamma_n^e z} \Psi_n(t, x), \quad z \leq z_1, \quad (7)$$

$$V(t, x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(t) e^{i\gamma_n^e z} \Psi_n(t, x) + G_e(t, M, M_0), \quad z \geq z_2, \quad (8)$$

$$\Psi_n(t, x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i\lambda_n x}, \lambda_n = \frac{t + 2n\pi}{a}, \gamma_n^e = \sqrt{k_e^2 - \lambda_n^2},$$

$$\text{Im}\gamma_n^e > 0; \quad \text{Im}\gamma_n^e = 0, \text{ то } \text{Re}\gamma_n^e > 0.$$

$G_e(t, M, M_0)$ - решение уравнения (3) в полосе  $D$  при  $k_i^2 = k_e^2 = \text{const}$  с условиями излучения на бесконечности, которое может быть представлено в следующей форме [3]:

$$G_e(t, M, M_0) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_n(t, x) \Psi_n^*(t, x)}{-i\gamma_n^e} e^{\gamma_n^e |z - z_0|}.$$

Формулы (7) и (8) можно рассматривать как аналитическую форму условий излучения,  $R_n(t)$  и  $T_n(t)$  неизвестные коэффициенты отражения и прохождения, подлежащие определению.

В [1] показано, что если решение задачи для функции  $V(t, x, z)$  существует и допускает применение формул Грина, то она удовлетворяет системе интегральных уравнений по контуру  $\Sigma$  :

$$\varphi(t, P_0) + \int_{\Sigma} K_{11}(t, P_0, P) \varphi(t, P) dl_p + \int_{\Sigma} K_{12}(t, P_0, P) \Psi(t, P) dl_p = F_1(t, P_0),$$

$$\Psi(t, P_0) + \int_{\Sigma} K_{21}(t, P_0, P) \varphi(t, P) dl_p + \int_{\Sigma} K_{22}(t, P_0, P) \Psi(t, P) dl_p = F_2(t, P_0),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(t, P) &= V_i(t, P), \Psi(t, P) = \left( \frac{\partial}{\partial n} V(t, P) \right)_i, \\ K_{11}(t, P_0, P) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_p} [G_i(t, P_0, P) - G_e(t, P_0, P)], \\ K_{12}(t, P_0, P) &= \frac{1}{2\pi} [G_i(t, P_0, P) - G_e(t, P_0, P)], \\ K_{21}(t, P_0, P) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial n_p \partial n_p} [G_i(t, P_0, P) - G_e(t, P_0, P)], \end{aligned}$$

$$F_1(t, P_0) = G_e(t, P_0, M_0), F_1(t, P_0) = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}} G(t, P_0, M_0),$$

здесь  $G_i(t, M, P)$  и  $G_e(t, M, P)$  - функции Грина уравнения Гельмгольца в области  $D$  с коэффициентами  $k_i^2$  и  $k_e^2$  удовлетворяющих условиям Флоке при  $x = 0, a$ .

Ядра интегральных уравнений (9) имеют слабую особенность при  $P \rightarrow P_0$ . Исследования, связанные со способом выделения особенности ядра в явном виде  $\ln \frac{1}{r_{PP_0}}$  содержится в [1].

Для численного решения системы интегральных уравнений используется метод Крылова-Боголюбова, в котором неизвестная функция аппроксимируется кусочно-постоянной функцией и интегральное уравнение сводится к алгебраической системе линейных уравнений. Решая систему линейных уравнений, найдем  $V(t, x, z)$  и  $\frac{\partial}{\partial n} V(t, x, z)$  в точках  $\Sigma$ . С помощью формулы Грина, найдем  $V(t, x, z)$  внутренней точке полосы  $D$ , а используя (5) и (6) определим полное поле  $u(x, z)$  в любой точке пространства. Нас будет интересовать поле в области  $\left\{ -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, z_1 \leq z \leq z_2 \right\}$ , а также асимптотическое поведение поля при  $r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ .

В [4], с помощью метода интегральных уравнений, впервые рассчитаны и проанализированы полные значения электрического и магнитного полей на поверхностях центрального и соседних с центральными цилиндров, поперечные сечения которых круг и эллипс.

Как показано в [5], при  $r \rightarrow \infty$  поле  $u(x, z)$  имеет следующее асимптотическое представление:

$$u(r, \varphi) = (2\pi k_e \sqrt{\varepsilon r})^{-\frac{1}{2}} F_T(\varphi) \exp \left\{ i k_e \sqrt{\varepsilon r} + i \frac{\pi}{4} \right\}, z \leq z_1,$$

$$u(r, \varphi) = u^0(r, \varphi) + (2\pi k_e \sqrt{\varepsilon r})^{-\frac{1}{2}} F_R(\varphi) \exp \left\{ i k_e \sqrt{\varepsilon r} + i \frac{\pi}{4} \right\}, z \geq z_2,$$

где  $F_T(\varphi)$  и  $F_R(\varphi)$  - диаграммы направленности рассеянного излучения. Они определяются гармониками

$$F_T(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{a} T_m(k_e a \sin \varphi - 2m\pi), & 2\pi m \leq k_e a \sin \varphi < k_e a \\ \dots & \dots \\ \sqrt{a} T_0(k_e a \sin \varphi), & 0 \leq k_e a \sin \varphi < 2\pi, \\ \dots & \dots \\ \sqrt{a} T_{-m}(k_e a \sin \varphi + 2\pi m), & -k_e a < k_e a \sin \varphi \leq -2\pi m, \end{cases}$$

где  $m = \left[ \frac{k_e a}{2\pi} \right]$ ,  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ ,  $-k_e a < k_e a \sin \varphi < k_e a$ .





Рис. 1 и 2 соответствуют параметрам круглых цилиндров

$$K_e d = \frac{\pi}{2}, \varepsilon = 5, \frac{a}{d} = 2,5, \frac{x_0}{d} = 0, \frac{z_0}{d} = 1.$$

На диаграмме  $F_R(\varphi)$  лепестков, соответствующий углу  $\varphi = 90^\circ$ , объясняется отражением от всей совокупности цилиндров, удаленных от источника, при скользящем падении возбуждающего поля. Лепесток при  $\varphi = 33^\circ$  также объясняется скользящим падением возбуждающего поля на решетку в области удаленных цилиндров.

Проводилось сравнение результатов, полученных с помощью описанного алгоритма, получено хорошее совпадение с результатами работы [6] (аналогичный метод Галеркина).

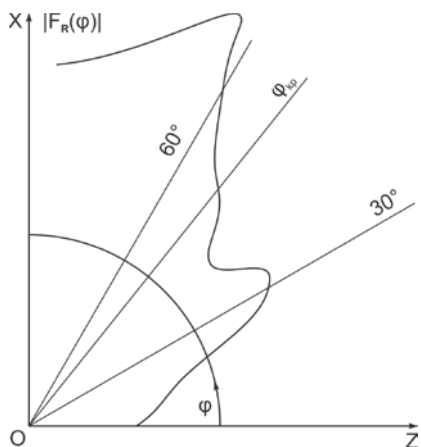


Рис. 3

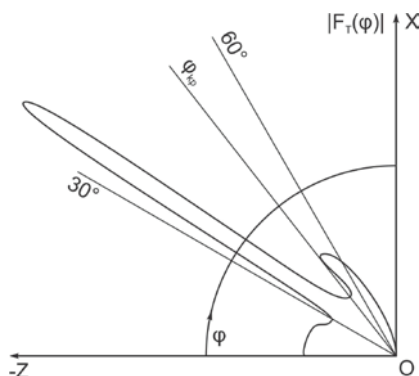


Рис. 4

Рис. 3 и 4 соответствуют геометрии решетки

$$K_e b_1 = \frac{\pi}{2}, \frac{b_1}{b_2} = 2, \frac{b_1}{a} = 0.4, \varepsilon = 5, \frac{x_0}{b_1} = 0, \frac{z_0}{b_1} = 2.$$

Угловое распределение соответствует случаю формирования поверхностной волны, бегущей вдоль структуры.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гасанов Ф.М., Ильинский А.С. Численный метод решения задачи дифракции на периодической системе прозрачных цилиндров. Сб. Численные методы электродинамики. М.: МГУ, 1976, с. 48-56.
2. Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волноводов. ДАН, 180, 1951, с. 345-347.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1999.
4. Гасанов Ф.М. Результаты численного исследования токов в задаче дифракции точечного источника на решетке прозрачных цилиндров. BDU-nun xəbərləri, №4, 2001, с. 100-105.
5. Ильинский А.С. Плоская задача возбуждения прозрачной периодической структуры точечным источником. Сб. Вычислительные методы и программирование. М.:

МГУ, XXIV, 1975, с. 220-235.

6. Быков А.А., Ильинский А.С. Результаты исследования дифракции поля точечного источника на решетке прозрачных круговых цилиндров. Сб. Численные методы электродинамики. М.: МГУ, 1980, с. 16-25.

## **DAİRƏVİ VƏ ELLİPTİK ŞƏFFAF SİLİNDİRLƏR STRUKTURUNDA NÖQTƏVİ MƏNBƏYİN DİFRAKSİYA MƏSƏLƏSİNİN UZAQ ZONADA ƏDƏDİ TƏDQIQINƏ İNTEQRAL TƏNLİKLƏR ÜSULUNUN TƏTBİQİ**

**F.M.HƏSƏNOV**

### **XÜLASƏ**

Məqalədə inteqral üsulunun tətbiqi ilə ən kəsiyi dairə və ellips olan şəffaf silindirlər strukturunda nöqtəvi mənbəyin difraksiya məsələsi uzaq zonada ədədi tədqiq olunur.

**Açar sözlər:** Helmhols tənliyi, diskret Furiye çevirməsi, inteqral tənlik, Qrin düsturu, difraksiya məsələsi, yönəlmə diaqramı.

## **APPLICATION OF THE METHOD OF INTEGRAL EQUATIONS TO NUMERICAL INVESTIGATION OF THE PROBLEM OF DEFRACTION OF THE POINT SOURCE FIELD ON THE GRID OF TRANSPARANT CIRCULAR AND ELLIPTIC CYLINDERS**

**F.M. GASANOV**

### **SUMMARY**

In the paper the problem of defraction of point source is numerically investigated with application of the method of integral equations in the remote zone on the structure of transparent periodic cylinders whose cross sections are a circle and an ellipse.

**Key words:** Helmholtz equation, discrete Fourier transformations, integral equation, Green's formula, problem of defrection, focus diagram.

*Поступила в редакцию: 16.09.2019 г.*

*Подписано к печати: 28.12.2019 г.*

УДК 517.9

**ОТСУТСТВИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНОГО  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С БИГАРМОНИЧЕСКИМ  
ОПЕРАТОРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ**

**Ш.Г.БАГЫРОВ**

*Бакинский Государственный Университет,  
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана  
sh\_bagirov@yahoo.com*

*Во внешности шара рассматривается полулинейное параболическое уравнение с бигармоническим оператором в главной части и исследуются вопросы отсутствия глобальных решений этого уравнения. Получено достаточное условие отсутствия глобальных решений. Доказательство основано на методе пробных функций.*

**Ключевые слова;** Полулинейное параболическое уравнение, глобальное решение, критический показатель, метод пробных функций.

Введем следующих обозначений:  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ ,  $n > 4$ ,  $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ,  $B_R = \{x; |x| < R\}$ ,  $B'_R = \{x; |x| > R\}$ ,  $B_{R_1, R_2} = \{x; R_1 < |x| < R_2\}$ ,  $Q_R = B_R \times (0; +\infty)$ ,  $Q'_R = B'_R \times (0; +\infty)$ ,  $\partial B_R = \{x; |x| = R\}$ ,  $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ ,  $C_{x,t}^{4,1}(Q'_R)$ -множество функций, четырежды непрерывно дифференцируемых по  $x$  и непрерывно дифференцируемых по  $t$ .

В области  $Q'_R$  рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} |x|^\lambda \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta^2 u^p + \frac{C_0}{|x|^4} u^p + |x|^\sigma |u|^q & (1.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0 & (1.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_0^\infty \int_{\partial B_R} u dx dt \geq 0, \quad \int_0^\infty \int_{\partial B_R} \Delta u^p dx dt \leq 0, & (1.3) \end{cases}$$

где  $q > 1$ ,  $0 \leq C_0 \leq \left(\frac{n(n-4)}{4}\right)^2$ ,  $\sigma > -4$ ,  $u_0(x) \in C(B'_R)$ ,  $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ ,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Будем изучать вопрос о существовании нетривиальных глобаль-

ных решений задачи (1.1)-(1.3). Решение задачи будем понимать в классическом смысле. Функцию  $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,1}(Q'_R) \cap C(B'_R \times [0, +\infty))$  будем называть решением задачи (1.1)-(1.3), если  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1.1) в каждой точке  $Q'_R$ , условию (1.2) при  $t = 0$  и условию (1.3) при  $|x| = R$ .

Проблемы существования и не существования глобальных решений для различного класса дифференциальных уравнений и неравенств играют важную роль в теории и приложениях, поэтому привлекают постоянное внимание математиков и им посвящены большое число работ(см.[2 ], [3], [4], [ 5],[11],[12] ).

Результаты работы Фуджиты [1] вызвали большой интерес к проблеме отсутствие глобальных решений, и они были расширены в нескольких направлениях. Например, вместо  $R^n$  рассмотрены различные ограниченные и неограниченные области, или были рассмотрены более общие операторы, чем оператор Лапласа и нелинейности иного типа. Обзор таких работ имеется в статье [6], в монографии [9] и в книге [7]. Слабо нелинейные уравнения с бигармоническим оператором тоже исследованы различными авторами (см.[8],[13],[14])

В представленной работе используя технику пробных функций, разработанный Митидиери и Похожаевым в работах [9],[10], мы находим критический показатель отсутствие глобального решения задачи (1.1)-(1.3).

## 1. Вспомогательные факты

В  $R^n \setminus \{0\}$  рассмотрим линейное уравнение

$$\Delta^2 u - \frac{C_0}{|x|^4} u = 0. \quad (2.1)$$

Найдем радиальное решение этого уравнения. Если  $u(x) = u(r)$  радиальное решение уравнения (2.1), то

$$\begin{aligned} \Delta^2 u - \frac{C_0}{|x|^4} u &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{C_0}{|x|^4} u = \\ &= \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + \frac{2(n-1)}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{(n-1)(n-3)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{(n-1)(n-3)}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{C_0}{r^4} u = 0. \end{aligned}$$

Это есть уравнение Эйлера и его характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 2(n-1)\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \\ + (n-1)(n-3)(\lambda^2 - 2\lambda) - C_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Легко проверить, что

$$\lambda = -\frac{n-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + 1 + \sqrt{(n-2)^2 + C_0}},$$

$$\lambda = -\frac{n-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + 1 - \sqrt{(n-2)^2 + C_0}}$$

все корни уравнения (2.2).

Для краткости записи обозначим:

$$(n-2)^2 + C_0 = D, \quad \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + 1 \pm \sqrt{D}} = \alpha_{\pm}.$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \xi(|x|) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right) |x|^{-\frac{n-4}{2}+\alpha_-} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right) |x|^{-\frac{n-4}{2}-\alpha_-} - |x|^{-\frac{n-4}{2}-\alpha_+}. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\xi(|x|)$  радиальное решение уравнения (2.1) в  $R^n \setminus \{0\}$ .

Покажем, что  $\xi(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\xi|_{|x|=1} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial r}|_{|x|=1} \geq 0, \quad \Delta \xi|_{|x|=1} = 0, \quad \frac{\partial(\Delta \xi)}{\partial r}|_{|x|=1} \leq 0. \quad (2.3)$$

$$\xi(x)|_{|x|=1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right) - 1 = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r}|_{|x|=1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right) \left(-\frac{n-4}{2} + \alpha_-\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right) \left(-\frac{n-4}{2} - \alpha_-\right) - \left(-\frac{n-4}{2} - \alpha_+\right) =$$

$$= \frac{1}{2} (\alpha_- + \sqrt{D} - \alpha_+) - \frac{1}{2} (\alpha_- - \sqrt{D} + \alpha_+) + \alpha_+ = \sqrt{D} \geq 0.$$

$$\Delta \xi|_{|x|=1} = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r}\right)|_{|x|=1} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right) \left(-\frac{n-4}{2} + \alpha_-\right) \left(\frac{n}{2} + \alpha_-\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right) \left(-\frac{n-4}{2} - \alpha_-\right) \left(\frac{n}{2} - \alpha_-\right) - \left(-\frac{n-4}{2} - \alpha_+\right) \left(\frac{n}{2} - \alpha_+\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right) \left(-\frac{n(n-4)}{4} + \alpha_-^2 + 2\alpha_-\right) +$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n(n-4)}{4}+\alpha_-^2-2\alpha_-\right)-\left(-\frac{n(n-4)}{4}+\alpha_+^2-2\alpha_+\right)= \\
& =-\frac{n(n-4)}{4}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)-1\right)+ \\
& +\alpha_-^2-\alpha_+^2+\alpha_-+\sqrt{D}-\alpha_+-\alpha_-+\sqrt{D}-\alpha_++2\alpha_+= \\
& =-\sqrt{D}-\sqrt{D}+\sqrt{D}+\sqrt{D}=0. \\
& \frac{\partial}{\partial r}(\Delta\xi)\Big|_{|x|=1}=\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial r^3}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}-\frac{n-1}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)\Big|_{|x|=1}= \\
& =\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left[\left(-\frac{n-4}{2}+\alpha_-\right)\left(-\frac{n-4}{2}+\alpha_--1\right)\left(-\frac{n}{2}+\alpha_-\right)+\right. \\
& \quad \left.+(n-1)\left(-\frac{n-4}{2}+\alpha_+\right)\left(-\frac{n}{2}+\alpha_-\right)\right]+ \\
& +\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left[\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_-\right)\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_--1\right)\left(-\frac{n}{2}-\alpha_-\right)+\right. \\
& \quad \left.+(n-1)\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_-\right)\left(-\frac{n}{2}-\alpha_-\right)\right]- \\
& -\left[\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_+\right)\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_+-1\right)\left(-\frac{n}{2}-\alpha_+\right)+\right. \\
& \quad \left.+(n-1)\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_+\right)\left(-\frac{n}{2}-\alpha_+\right)\right]= \\
& =\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n-4}{2}+\alpha_-\right)\left(-\frac{n}{2}+\alpha_-\right)\left(\frac{n}{2}+\alpha_-\right)+ \\
& +\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_-\right)\left(-\frac{n}{2}-\alpha_-\right)\left(\frac{n}{2}-\alpha_-\right)- \\
& -\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_+\right)\left(-\frac{n}{2}-\alpha_+\right)\left(\frac{n}{2}-\alpha_+\right)= \\
& =\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n-4}{2}+\alpha_-\right)\left(\alpha_-^2-\frac{n^2}{4}\right)+ \\
& +\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{D}-\alpha_+}{\alpha_-}\right)\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_-\right)\left(\alpha_-^2-\frac{n^2}{4}\right)-\left(-\frac{n-4}{2}-\alpha_+\right)\left(\alpha_+^2-\frac{n^2}{4}\right)=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2 - n - \sqrt{D}) \left( -\frac{n-4}{2} + \frac{1}{2}(\alpha_- + \sqrt{D} - \alpha_+ - \alpha_- + \sqrt{D} - \alpha_+) \right) + \\
&+ (2 - n + \sqrt{D}) \left( \frac{n-4}{2} + \alpha_+ \right) = (2 - n - \sqrt{D}) \left( -\frac{n-4}{2} + \sqrt{D} - \alpha_+ \right) + \\
&\quad + (2 - n + \sqrt{D}) \left( \frac{n-4}{2} + \alpha_+ \right) = -(2 - n - \sqrt{D}) \left( \frac{n-4}{2} + \alpha_+ \right) + \\
&\quad + (2 - n) \sqrt{D} - D + (2 - n + \sqrt{D}) \left( \frac{n-4}{2} + \alpha_+ \right) = \\
&\quad = \sqrt{D} \frac{n-4}{2} - \alpha_+ (2 - n) + \sqrt{D} \alpha_+ + (2 - n) \sqrt{D} - D + \\
&\quad + \sqrt{D} \frac{n-4}{2} + (2 - n) \alpha_+ + \sqrt{D} \alpha_+ = 2\sqrt{D} \alpha_+ - 2\sqrt{D} - D = \\
&\quad = \sqrt{D} (2\alpha_+ - \sqrt{D} - 2) \leq 0.
\end{aligned}$$

На самом деле, поскольку  $C_0 \geq 0$ , то

$$(n-2)^2 \leq (n-2)^2 + C_0 = D.$$

Тогда

$$4 + 4\sqrt{D} + (n-2)^2 \leq 4 + 4\sqrt{D} + D.$$

Отсюда

$$4 \left( \left( \frac{n-2}{2} \right)^2 + 1 + \sqrt{D} \right) \leq (2 + \sqrt{D})^2$$

$$4\alpha_+^2 \leq (2 + \sqrt{D})^2,$$

$$2\alpha_+ \leq 2 + \sqrt{D}.$$

Значит

$$2\alpha_+ - \sqrt{D} - 2 \leq 0.$$

## 2. Формулировка основного результата и доказательство

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $n > 4$ ,  $\sigma > -4$ ,  $1 \leq p < q$ ,  $0 \leq C_0 \leq \left( \frac{n(n-4)}{4} \right)^2$  и  $q \leq p + \frac{\sigma+4}{\frac{n+4}{2} + \lambda + \alpha_-}$ . Если  $u(x, t)$  решение задачи (1.1)-(1.3), то  $u(x, t) \equiv 0$ .

Доказательство.

Для простоты записи возьмем  $R = 1$ . Предположим, что  $u(x) \geq 0$  решение задачи (1.1)-(1.3) в  $Q'_R$ .

Рассмотрим следующих функций:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 1 \leq |x| \leq \rho \\ \frac{1}{2} \cos(\pi(\frac{|x|}{\rho} - 1)) + \frac{1}{2}, & \text{при } \rho \leq |x| \leq 2\rho \\ 0, & \text{при } |x| \geq 2\rho \end{cases}$$

$$T_\rho(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq t \leq \rho^k \\ \frac{1}{2} \cos(\pi(\rho^{-k}t - 1)) + \frac{1}{2}, & \text{при } \rho^k \leq t \leq 2\rho^k \\ 0, & \text{при } t \geq 2\rho^k \end{cases}$$

где  $\beta, \mu$  большие положительные числа, причем  $\beta$  такое, что при  $|x| = 2\rho$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} = 0, \quad (3.1)$$

а к определим потом.

Умножим уравнение (1.1) на функцию

$$\psi(x, t) = T_\rho(t) \xi(x) \varphi(x)$$

и интегрируем по области  $Q'_1$ .

После интегрирование по частям получим

$$\begin{aligned} \int_{Q'_1} u^q |x|^\sigma T_\rho \xi \varphi dx dt &= - \int_{Q'_1} |x|^\lambda u \xi \varphi \frac{dT_\rho}{dt} dx dt + \\ &+ \int_{Q'_1} u^p T_\rho \Delta^2(\xi \varphi) dx dt - \int_{Q'_1} \frac{C_0}{|x|^4} u^p T_\rho \xi \varphi dx dt - \\ &- \int_{Q'_1} |x|^\lambda u_0(x) \xi(x) \varphi(x) dx + \int_0^\infty T_\rho(t) dt \times \\ &\times \left[ \int_{\partial B_{1,2\rho}} \frac{\partial(\Delta u^p)}{\partial \nu} \xi \varphi ds - \int_{\partial B_{1,2\rho}} \Delta u^p \frac{\partial(\xi \varphi)}{\partial \nu} ds + \right. \\ &\left. + \int_{\partial B_{1,2\rho}} \frac{\partial u^p}{\partial \nu} \Delta(\xi \varphi) ds - \int_{\partial B_{1,2\rho}} u^p \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta(\xi \varphi)) ds \right] \quad (3.2) \end{aligned}$$

Оценим интегралы в квадратной скобке, учитывая (2.3), (3.1) и условие (1.3). Получим:

$$\int_{\partial B_{1,2\rho}} \frac{\partial(\Delta u^p)}{\partial \nu} \xi \varphi ds = 0,$$



$$\begin{aligned}
& - \int_{\partial B_{1,2\rho}} \Delta u^p \frac{\partial(\xi\varphi)}{\partial\nu} ds = - \int_{|x|=1} \Delta u^p \frac{\partial(\xi\varphi)}{\partial\nu} ds - \int_{|x|=2\rho} \Delta u^p \frac{\partial(\xi\varphi)}{\partial\nu} ds = \\
& = \int_{|x|=1} \Delta u^p \left( \frac{\partial\xi}{\partial r} \varphi + \xi \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) ds - \int_{|x|=2\rho} \Delta u^p \left( \frac{\partial\xi}{\partial r} \varphi + \xi \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) ds = \\
& = \int_{|x|=1} \Delta u^p \frac{\partial\xi}{\partial r} ds = \sqrt{D} \int_{|x|=1} \Delta u^p ds \leq 0
\end{aligned}$$

в силу (1.3),

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_{1,2\rho}} \frac{\partial u^p}{\partial\nu} \Delta(\xi\varphi) ds &= \int_{\partial B_{1,2\rho}} \frac{\partial u^p}{\partial\nu} (\Delta\xi\varphi + 2(\nabla\xi, \nabla\varphi) + \xi\Delta\varphi) ds = \\
&= - \int_{|x|=1} \frac{\partial u^p}{\partial r} \Delta\xi ds = 0
\end{aligned}$$

по условию (2,3)

$$\begin{aligned}
& - \int_{\partial B_{1,2\rho}} u^p \frac{\partial}{\partial\nu} (\Delta(\xi\varphi)) ds = - \int_{|x|=1} u^p \frac{\partial}{\partial\nu} (\Delta\xi\varphi + 2(\nabla\xi, \nabla\varphi) + \\
& \xi\Delta\varphi) ds = \\
& = \int_{|x|=1} u^p \frac{\partial(\Delta\xi)}{\partial r} ds = \sqrt{D}(2\alpha_+ - \sqrt{D} - 2) \int_{|x|=1} u^p ds \leq 0.
\end{aligned}$$

Поскольку  $\int_{B'_1} |x|^\lambda u_0(x) \xi(x) \varphi(x) dx \geq 0$ ,  $\int_0^\infty T_\rho(t) dt > 0$ , то из (3.2)

$$\begin{aligned}
& \int_{Q'_1} u^q |x|^\sigma T_\rho \xi \varphi dx dt \leq - \int_{Q'_1} |x|^\lambda u \xi \varphi \frac{dT_\rho}{dt} dx dt + \\
& + \int_{Q'_1} u^p T_\rho \Delta^2(\xi\varphi) dx dt - \int_{Q'_1} \frac{C_0}{|x|^4} u^p T_\rho \xi \varphi dx dt = \\
& = - \int_{Q'_1} u^p \xi \varphi \frac{dT_\rho}{dt} dx dt + \int_{Q'_1} u^p T_\rho \varphi \left( \Delta^2 \xi - \frac{C_0}{|x|^4} \xi \right) dx dt + \\
& + \int_{Q'_1} u^p T_\rho [4(\nabla(\Delta\xi), \nabla\varphi) + 4(\nabla\xi, \nabla(\Delta\varphi)) + 2\Delta\xi\Delta\varphi + \\
& + 4 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}] dx dt \leq \\
& \leq - \int_{\rho^\kappa}^{2\rho^\kappa} \int_{Q'_1} u \xi \varphi \frac{dT_\rho}{dt} dx dt + \int_0^{2\rho^\kappa} \int_{B_{\rho,2\rho}} u^p T_\rho J(\xi, \varphi) dx dt, \quad (3.3)
\end{aligned}$$

где через  $J(\xi, \varphi)$  обозначили выражение в квадратной скобке, т.е.

$$J(\xi, \varphi) \equiv 4(\nabla(\Delta\xi), \nabla\varphi) + 4(\nabla\xi, \nabla(\Delta\varphi)) + 2\Delta\xi\Delta\varphi + 4 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Используя неравенство Гельдера из (3.3) получим, что

$$\begin{aligned} \int_{Q'_1} u^q |x|^\sigma T_\rho \xi \varphi dx dt &\leq \left( \int_{\rho^\kappa}^{2\rho^\kappa} \int_{Q'_1} u^q |x|^\sigma T_\rho \xi \varphi dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \times \\ &\times \left( \int_{\rho^\kappa}^{2\rho^\kappa} \int_{Q'_1} \frac{\left| \frac{dT_\rho}{dt} \right|^{q'} |x|^{\lambda q'} \xi \varphi}{T_\rho^{q'-1} |x|^{\sigma(q'-1)}} dx dt \right)^{\frac{1}{q'}} + \\ &+ \left( \int_0^{2\rho^\kappa} \int_{B_{\rho, 2\rho}} u^q |x|^\sigma T_\rho \xi \varphi dx dt \right)^{\frac{1}{\beta}} \left( \int_0^{2\rho^\kappa} \int_{B_{\rho, 2\rho}} \frac{|J(\xi, \varphi)|^{\beta'} T_\rho}{\xi^{\beta'-1} \varphi^{\beta'-1} |x|^{\sigma(\beta'-1)}} dx dt \right)^{\frac{1}{\beta'}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ ,  $\beta = \frac{q}{p}$ ,  $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1$ . Отсюда, получим

$$\begin{aligned} \int_{Q'_1} u^q |x|^\sigma T_\rho \xi \varphi dx dt &\leq C_1 \int_{\rho^\kappa}^{2\rho^\kappa} \int_{Q'_1} \frac{\left| \frac{dT_\rho}{dt} \right|^{q'} |x|^{\lambda q'} \xi \varphi}{T_\rho^{q'-1} |x|^{\sigma(q'-1)}} dx dt + \\ &+ C_2 \int_0^{2\rho^\kappa} \int_{B_{\rho, 2\rho}} \frac{|J(\xi, \varphi)|^{\beta'}}{\xi^{\beta'-1} \varphi^{\beta'-1} |x|^{\sigma(\beta'-1)}} dx dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Сделав замену  $t = \rho^\kappa s$ ,  $r = \rho\theta$ ,  $\tilde{T}(s) = T_\rho(\rho^\kappa s)$ ,  $\tilde{\xi}(\theta) = \xi(\rho\theta)$ ,  $\tilde{\varphi}(\theta) = \varphi(\rho\theta)$ , оценим интегралы в правой части (3.5).

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \int_{\rho^\kappa}^{2\rho^\kappa} \int_{Q'_1} \frac{\left| \frac{dT_\rho}{dt} \right|^{q'} |x|^{\lambda q'} \xi \varphi}{T_\rho^{q'-1} |x|^{\sigma(q'-1)}} dx dt \leq \\ &\leq \int_{\rho^\kappa}^{2\rho^\kappa} \frac{\left| \frac{dT_\rho}{dt} \right|^{q'}}{T_\rho^{q'-1}} dt \int_{B_{1, 2\rho}} |x|^{\lambda q'} |x|^{-\sigma(q'-1)} \xi \varphi dx \leq \\ &\leq C \rho^{-\kappa q' + \kappa} \int_1^2 \frac{\left| \frac{d\tilde{T}}{ds} \right|^{q'}}{\tilde{T}^{q'-1}} ds \int_1^{2\rho} r^{-\frac{n-4}{2} + \alpha_-} r^{\lambda q' - \sigma(q'-1)} r^{n-1} dr \leq \\ &\leq C \rho^{\kappa(1-q') - \frac{n-4}{2} + \alpha_- + \lambda q' - \sigma(q'-1) + n} A_1(\tilde{T}) = \end{aligned}$$

$$= C\rho^{\kappa(1-q')+\frac{n+4}{2}+\alpha_-+\lambda q'-\sigma(q'-1)}A_1(\tilde{T}),$$

где

$$A_1(\tilde{T}) = \int_1^2 \frac{\left|\frac{d\tilde{T}}{ds}\right|^{q'}}{\tilde{T}^{(q'-1)}} ds.$$

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \int_0^{2\rho^\kappa} \int_{B_{\rho,2\rho}} \frac{|J(\xi,\varphi)|^{\beta'} T_\rho}{\xi^{\beta'-1} \varphi^{\beta'-1} |x|^{\sigma(\beta'-1)}} dx dt = \\ &= \int_0^{2\rho^\kappa} T_\rho(t) dt \int_{B_{\rho,2\rho}} \frac{|J(\xi,\varphi)|^{\beta'}}{\xi^{\beta'-1} \varphi^{\beta'-1} |x|^{\sigma(\beta'-1)}} dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Оценим каждое слагаемое  $J(\xi, \varphi)$  в отдельности.

$$|(\nabla(\Delta\xi), \nabla\varphi)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| =$$

$$= \left| \left( \frac{\partial^3 \xi}{\partial r^3} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} - \frac{n-1}{r^2} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right| \leq$$

$$\leq C r^{-\frac{n-4}{2}+\alpha_- - 3} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|$$

$$|\Delta\xi \Delta\varphi| = \left| \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right| \leq$$

$$\leq C_5 r^{-\frac{n-4}{2}+\alpha_- - 2} \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|,$$

$$|(\nabla\xi, \nabla(\Delta\varphi))| \leq$$

$$\leq C_6 r^{-\frac{n-4}{2}+\alpha_- - 1} \left( \left| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \right| + \frac{n-1}{r} \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right| + \frac{n-1}{r^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right| \right),$$

$$\left| \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right| =$$

$$= \left| \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{x_i}{r} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{x_i}{r} \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \left( \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3} \right) \right) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left( \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3} \right) \right) \Big| \leq \\
& \leq C_7 \left( \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \right| + \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \xi}{\partial r} \right| \right) \left( \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right| + \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right| \right) \leq \\
& \leq C_8 r^{-\frac{n-4}{2} + \alpha_- - 2} \left( \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right| + \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right| \right).
\end{aligned}$$

Используя все это, из (3.6) получим

$$I_2 \leq C \rho^\kappa \int_\rho \frac{2\rho r^{(-\frac{n-4}{2} + \alpha_- - 4)\beta'} \left( r \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right| + r^2 \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right| + r^3 \left| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \right| \right)^{\beta'} r^{n-1}}{r^{(-\frac{n-4}{2} + \alpha_-)(\beta' - 1) + \sigma(\beta' - 1)} \varphi^{\beta' - 1}} dr.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
I_2 & \leq C_{10} \rho^{\kappa - \frac{n-4}{2} + \alpha_- - 4\beta' - \sigma(\beta' - 1) + n} \int_1^2 \frac{\left( \theta \left| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right| + \theta^2 \left| \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \theta^2} \right| + \theta^3 \left| \frac{\partial^3 \tilde{\varphi}}{\partial \theta^3} \right| \right)^{\beta'}}{\theta^{\frac{n-4}{2} - \alpha_- + 4\beta' + \sigma(\beta' - 1) - n + 1} \tilde{\varphi}^{(\beta' - 1)}} d\theta \leq \\
& \leq C_{10} \rho^{\kappa + \frac{n+4}{2} + \alpha_- - 4\beta' - \sigma(\beta' - 1)} A_2(\tilde{\varphi}), \tag{3.7}
\end{aligned}$$

где через  $A_2(\tilde{\varphi})$  обозначили последний интеграл.

Очевидно, что при больших  $\mu$  и  $\tau$ ,  $A_1(\tilde{T}) < \infty$ ,  $A_2(\tilde{\varphi}) < \infty$ .

к возьмем так, чтобы

$$\kappa - 4\beta' - \sigma(\beta' - 1) = \kappa(1 - q') + \lambda q' - \sigma(q' - 1).$$

Отсюда  $\kappa = \sigma \frac{p-1}{q-p} + 4 \frac{q-1}{q-p} + \lambda$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
& \kappa(1 - q') + \frac{n+4}{2} + \alpha_- + \lambda q' - \sigma(q' - 1) = - \left( \sigma \frac{p-1}{q-p} + 4 \frac{q-1}{q-p} + \right. \\
& \left. \lambda \right) \frac{1}{q-1} + \frac{n+4}{2} + \alpha_- + \lambda \frac{q}{q-1} - \sigma \frac{1}{q-1} = - \frac{\sigma+4}{q-p} + \frac{n+4}{2} + \alpha_- + \lambda
\end{aligned}$$

Используя (3.6), (3.7) и (3.5) получим

$$\int_{Q'_1} |u|^q |x|^{\sigma} T_\rho \xi \varphi dx dt \leq (C A_1(\tilde{T}) + C_2 A_2(\tilde{\varphi})) \rho^{-\frac{\sigma+4}{q-p} + \frac{n+4}{2} + \alpha_- + \lambda}. \tag{3.8}$$

Пусть теперь

$$\frac{\sigma+4}{q-p} - \frac{n+4}{2} - \alpha_- - \lambda > 0.$$

Тогда

$$\frac{\sigma+4}{q-p} > \frac{n+4}{2} + \alpha_- + \lambda$$

и

$$q < p + \frac{\sigma+4}{\frac{n+4}{2} + \alpha_- + \lambda}.$$

В этом случае устремив  $\rho$  к  $+\infty$  из (3.8) получим, что

$$\int_{Q'_1} |u|^q |x|^\sigma \xi dx dt \leq 0.$$

Это значит, что  $u \equiv 0$ .

Пусть теперь  $\frac{\sigma+4}{q-p} - \frac{n+4}{2} - \alpha_- - \lambda = 0$ .

Тогда из (3.6), (3.8) получим, что  $I_1 < C$ ,  $I_2 < C$  и следовательно

$$\int_{Q'_1} u^q |x|^\sigma \xi dx dt < C.$$

Из свойства интеграла получим, что

$$\int_0^\infty \int_{B_{\rho,2\rho}} u^q |x|^\sigma \xi dx dt \rightarrow 0, \quad (3.9)$$

и

$$\int_{\rho^4}^{2\rho^4} \int_{Q'_1} u^q |x|^\sigma \xi dx dt \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Тогда из (3.4)

$$\begin{aligned} \int_{Q'_1} u^q |x|^\sigma T_\rho \xi \varphi dx dt &\leq \left( \int_{\rho^4}^{2\rho^4} \int_{Q'_1} u^q |x|^\sigma \xi T_\rho \varphi dx dt \right)^{\frac{1}{q}} I_1^{\frac{1}{q'}} + \\ &+ \left( \int_0^{2\rho^4} \int_{B_{\rho,2\rho}} u^q |x|^\sigma T_\rho \xi \varphi dx dt \right)^{\frac{1}{\beta}} I_2^{\frac{1}{\beta'}} \leq \\ &\leq \left( \int_{\rho^4}^{2\rho^4} \int_{Q'_1} u^q |x|^\sigma \xi dx dt \right)^{\frac{1}{q}} I_1^{\frac{1}{q'}} + \left( \int_0^\infty \int_{B_{\rho,2\rho}} u^q |x|^\sigma \xi dx dt \right)^{\frac{1}{\beta}} I_2^{\frac{1}{\beta'}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $\rho \rightarrow +\infty$  в силу (3.9), (3.10).

Отсюда следует, что  $u \equiv 0$ .

Этим теорема полностью доказано.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fujita H. On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for  $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ . // J. Fac. Sci. Univ, Tokyo, Sect. I, 13, 1966, p.109-124.
2. Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of linear elliptic equations, Comm. Pure. Appl. Math.vol 34,pages 525-598,yr 1981
3. Hayakawa K. On non-existence of global solutions of some semi-linear parabolic equations.// Proc. Japan. Acad. 49, 1973, p.503-505.
4. Kon'kov A.A. On solutions of quasi-linear elliptic inequalities containing terms with lower-order derivatives, Nonlinear Anal., 90 (2013), p. 121-134.
5. Kobayashi K., Siano T., Tanaka H. On the blowing up problem of semi linear heat equations. // J. Math. Soc. Japan, 29, 1977, p.407-424.
6. Levine H.A. The role of critical exponents in blow up theorems. // SIAM Review, 32.2, 1990, p.262-288.
7. Самарский А.А., Галактионов Г.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987, 480 с.

8. Лаптев Г.Г. Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств. // Труды. Математического института им. В.А.Стеклова 2001, в. 232, с.223-235
9. Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных дифференциальных уравнений и неравенств в частных производных // Труды МИАН, 2001, т.234, с.359-396.
10. Митидиери Э., Похожаев С.И. Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в  $R^n$  // Труды МИАН, 1999, т.227, с.192-222.
11. Serrin J, Zou H. Nonexistence of positive solutions of Lane-Emden system, Dif. Integr.Equat., 9 (1996), pages 635-653.
12. Uda Y. The critical exponent for a weakly coupled system of the generalized Fujita type reaction-diffusion equations, Z. Angew. Math. Phys., 46 (1995), no. 3, 366-373.
13. Bagirov Sh. Nonexistence of global solutions to the system
14. of semilinear parabolic equations with biharmonic operator and singular potential Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2018 (2018), No. 09, pp. 1-13.
15. Багыров Ш.Г. Отсутствие решений полулинейного бигармонического уравнения с сингулярным потенциалом, Математические заметки, т. 103, в. 1, январь 2018, с.27-37.

## BAŞ HİSSƏDƏ BİHARMONİK OPERATOR OLAN YARIMXƏTTİ PARABOLİK TƏNLİYİN QLOBAL HƏLLİNİN YOXLUĞU

Ş.Q.BAĞIROV

XÜLASƏ

Şarın xarici olan oblastda baş hissədə biqarmonik operator olan yarımxətti parabolik tənliyə baxılır və qlobal həllin yoxluğu məsələsi öyrənilir. Qlobal həllərin yoxluğu üçün kafi şərt tapılmışdır. İsbat sınaq funksiyalar üsulundan istifadə edilərək aparılmışdır.

**Açar sözlər:** yarımxətti parabolik tənlik, qlobal həll, kritik qüvvət, sınaq funksiyalar üsulu.

## THE ABSENCE OF GLOBAL SOLUTIONS OF A SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH A BIHARMONIC OPERATOR IN THE MAIN PART

Sh.H.BAGIROV

SUMMARY

In the exterior of the ball, a semilinear parabolic equation with a biharmonic operator in the main part is considered, and the absence of global solutions of this equation is investigated. A sufficient condition for the absence of global solutions is obtained. The proof is based on the test function method.

**Keywords:** Semilinear parabolic equation, global solution, critical exponent, method of test functions.

*Postupila v redakciju: 16.05.2019 z.*

*Podpisano k печати: 28.12.2019 z.*

УДК 517.956.35

## СУЩЕСТВОВАНИЕ И АСИМПТОТИКА ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

Г.ШАФИЕВА

*Бакинский Государственный Университет,  
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана,  
gulshan.shafiyeva@mail.ru*

*Рассмотрена задача Коши для полулинейных систем уравнений Клейна-Гордона с общей фокусирующей нелинейностью. Исследована потенциальная яма и глобальная разрешимость соответствующей задачи Коши, а также асимптотика полной энергии при  $t \rightarrow +\infty$ .*

**Ключевые слова.** Система Клейна-Гордона, задача Коши, потенциальная яма, глобальная разрешимость.

В данной статье рассматривается следующая задача Коши для систем уравнений Клейна-Гордона:

$$u_{itt} - \Delta u_i + \alpha_i u_i + u_{it} = \sum_{j=1}^m a_{ij} |u_i|^{p-1} |u_j|^{p+1} u_i, \quad i=1, \dots, m, \quad (1)$$

$$u_i(0, x) = \varphi_i(x), \quad u_{it}(0, x) = \psi_i(x), \quad i=1, \dots, m, \quad (2)$$

где  $\alpha_i > 0$ ,  $p \geq 0$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, \infty)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Случай, когда  $m=2$ ,  $a_{ij} = -\delta_{ij}$ ,  $i, j=1, 2$  система (1) описывает движение заряженных мезонов в электромагнитном поле, и исследован в работе [1].

А в случае, когда  $m=2$ ,  $a_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $i, j=1, 2$  задача (1), (2) широко исследована в работах [2,3].

Кроме того, исследования в этом направлении проводились и были развиты во многих работах, среди которых можно отметить работы [4-10]. В частности, в работе [6] для системы из двух уравнений Клейна-Гордона

$$\left. \begin{aligned} u_{1tt} - \Delta u_1 + m_1 u_1 + u_{1t} &= |u_1|^{p-1} |u_2|^{p+1} u_1 \\ u_{2tt} - \Delta u_2 + m_2 u_2 + u_{2t} &= |u_1|^{p+1} |u_2|^{p-1} u_2 \end{aligned} \right\}$$

исследована потенциальная яма. Далее, в этой же работе используя полученные результаты, исследована глобальная разрешимость, поведение глобальных решений при  $t \rightarrow \infty$ , а также не существование глобальных решений. Аналогичные вопросы исследованы в работе [8] для системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} u_{1tt} - \Delta u_1 + m_1 u_1 + u_{1t} &= |u_1|^{p_1-1} |u_2|^{p_2+1} u_1 \\ u_{2tt} - \Delta u_2 + m_2 u_2 + u_{2t} &= |u_1|^{p_1+1} |u_2|^{p_2-1} u_2 \end{aligned} \right\},$$

в работе [9] для системы

$$\left. \begin{aligned} u_{1tt} - \Delta u_1 + m_1 u_1 + u_{1t} &= |u_1|^{p_1-1} |u_2|^{p_2+1} |u_3|^{p_3+1} u_1 \\ u_{2tt} - \Delta u_2 + m_2 u_2 + u_{2t} &= |u_1|^{p_1+1} |u_2|^{p_2-1} |u_3|^{p_3+1} u_2 \\ u_{3tt} - \Delta u_3 + m_3 u_3 + u_{3t} &= |u_1|^{p_1+1} |u_2|^{p_2+1} |u_3|^{p_3-1} u_3 \end{aligned} \right\},$$

а в работе [10] для системы из  $n$ -уравнений

$$u_{itt} - \Delta u_i + m_i u_i + u_{it} = |u_i|^{p_i-1} |u_j|^{p_j+1} u_i, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

В данной работе исследована потенциальная яма и глобальная разрешимость задачи (1), (2). На основании полученных результатов доказано, что полная энергия системы (1) экспоненциально убывает.

Будем исследовать задачу (1), (2) при выполнении следующих условий:

- I.  $p \geq 1$  при  $n \geq 2$  и дополнительно  $p \leq \frac{1}{n-2}$ , когда  $n \geq 3$ ;
- II.  $a_{ij} \in R$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, m$  и для  $\forall (\xi_1, \dots, \xi_m) \in R^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  верно неравенство  $\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \xi_i \xi_j > 0$ .

## 1. Предварительные сведения.

Норму в пространстве  $L_q(R^n)$  обозначим через  $\|\cdot\|_q$ , причем при  $q = 2$  положим  $\|\cdot\|_q = \|\cdot\|$ . Через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначим скалярное произведение в  $L_2(R^n)$ . Норму же в пространстве Соболева  $H^1(R^n)$  обозначим через  $\|\cdot\|$ , т.е.  $\|u\| = \left[ \|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ , где  $\nabla u$  -градиент функции  $u$ .

Определим следующие функционалы:

$$J(\phi_1, \dots, \phi_m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|\phi_i\|^2 - \frac{1}{2(p+1)} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} |\phi_i \phi_j|_{p+1}^{p+1},$$



$$I_\delta(\phi_1, \dots, \phi_m) = \delta \sum_{i=1}^m \|\phi_i\|^2 - \sum_{i,j=1}^m a_{ij} |\phi_i \phi_j|_{p+1}^{p+1}, \quad \delta > 0.$$

Положим  $I_1(\phi_1, \dots, \phi_m) = I(\phi_1, \dots, \phi_m)$ .

**Лемма 1.** Пусть  $(\phi_1, \dots, \phi_m) \in (H^1)^m \setminus \{0, \dots, 0\}$ , тогда справедливы следующие утверждения:

(Л1i)  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J(\lambda\phi_1, \dots, \lambda\phi_m) = 0$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} J(\lambda\phi_1, \dots, \lambda\phi_m) = -\infty$ ;

(Л1ii) Существует такое  $\lambda^* = \lambda^*(\phi_1, \dots, \phi_m)$ , что при  $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$   $J(\lambda\phi_1, \dots, \lambda\phi_m)$  не убывает, а при  $\lambda^* \leq \lambda < +\infty$  не возрастает;

(Л1iii) Если  $0 < \lambda < \lambda^*$ , то  $I(\lambda\phi_1, \dots, \lambda\phi_m) < 0$ , а если  $\lambda^* < \lambda < +\infty$ , то  $I(\lambda\phi_1, \dots, \lambda\phi_m) > 0$ .

Ядро функционала  $I_\delta(\phi_1, \dots, \phi_m)$  обозначим через  $N_\delta$ , т.е.

$$N_\delta = \{(\phi_1, \dots, \phi_m) : \phi_i \in H^1(R^n), i = 1, \dots, m, I_\delta(\phi_1, \dots, \phi_m) = 0\}$$

Положим  $N_1 = N$ . Допустим,  $(\phi_1, \dots, \phi_m) \in N$ , тогда легко видеть, что

$$J(\phi_1, \dots, \phi_m) = \frac{p}{2(p+1)} \sum_{i=1}^m \|\phi_i\|^2 > 0.$$

Предположим,  $d = d(1)$ , где

$$d(\delta) = \inf_{(\phi_1, \dots, \phi_m) \in N} J(\phi_1, \dots, \phi_m),$$

тогда, используя метод симметризации Шварца, как это было сделано в [11, 12], доказывается, что  $d > 0$ .

Пусть

$$\mu = \inf \eta,$$

где  $\eta$  – положительное число такое, что

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \xi_i^{p+1} \xi_j^{p+1} \leq \eta \left[ \sum_{k=1}^m \xi_k^2 \right]^{p+1},$$

при любых  $\xi_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Через  $C_*$  обозначим норму оператора вложения  $H^1$  в  $L_{2(p+1)}$ , т.е.

$$C_* = \inf C, \text{ где } \|u\|_{L_{2(p+1)}} \leq C \|u\|.$$

Примем:

$$r(\delta) = \left( \frac{\delta}{\mu C_*^{2(p+1)}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Лемма 2.** Пусть выполнены условия I, II. Тогда справедливы следующие утверждения:

(Л2i) Если  $(u_1, \dots, u_m) \square [H^1]^m \setminus \{0, \dots, 0\}$ ,  $\sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 < r(\delta)$ , то  $I_\delta(u_1, \dots, u_m) > 0$

и наоборот, если  $I_\delta(u_1, \dots, u_m) < 0$ , то  $\sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 > r(\delta)$ ;

(Л2ii) Если  $(u_1, \dots, u_m) \in [H^1]^m \setminus \{0, \dots, 0\}$  и  $I_\delta(u_1, \dots, u_m) = 0$ , то  $\sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 \geq r(\delta)$ ;

(Л2iii)  $d(\delta) \geq a(\delta) \cdot r(\delta)$ , где  $d(\delta) = \delta^{\frac{1}{p}} \frac{p+1-\delta}{p} d$ ,  $a(\delta) = \frac{p+1-\delta}{2(p+1)} d$ ;

(Л2iv)  $\lim_{\delta \rightarrow +0} d(\delta) = 0$ ,  $d(p+1) = 0$ ,  $d(1) = d$ ,  $d'(\delta) > 0$ ,  $\delta \in (0, 1)$ ,  $d'(\delta) < 0$ ,  $\delta \in (1, p+1)$ .

## 2. Основные результаты.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия I, II. Тогда для любых  $(u_{10}, \dots, u_{m0}) \square [H^1]^m$ ,  $(u_{11}, \dots, u_{m1}) \square [L_2(R^n)]^m$  существует  $T' \in (0, +\infty)$  такое, что задача (1), (2) имеет единственное решение  $(u_1, \dots, u_m) \square C([0, T']; [H^1]^m) \cap C^1([0, T']; [L_2(R^n)]^m)$

Если  $T_{\max} = \sup T'$ , т.е., если  $T_{\max}$  длина максимального интервала существования слабого решения  $(u_1, \dots, u_m) \square C([0, T_{\max}]; [H^1]^m) \cap C^1([0, T_{\max}]; [L_2(R^n)]^m)$ , то справедлива альтернатива:

-либо  $T_{\max} = +\infty$ ;

-либо  $\lim_{t \rightarrow T_{\max}^-} \sum_{i=1}^m [\|\dot{u}_i(t, \cdot)\|^2 + \|u_i(t, \cdot)\|^2] = +\infty$ .

Определим энергетическую функцию  $E(t)$  следующим образом:

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [\|\dot{u}_i(t, \cdot)\|^2 + \|u_i(t, \cdot)\|^2] - \frac{1}{2(p+1)} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} |u_i u_j|_{p+1}^{p+1}, \quad (3)$$

а также следующие множества:

$$W_\delta = \left\{ (u_1, \dots, u_m) \square [H^1]^m, I_\delta(u_1, \dots, u_m) > 0, J(u_1, \dots, u_m) < d(\delta) \cup \{(0, \dots, 0)\} \right\}$$

$$V_\delta = \left\{ (u_1, \dots, u_m) \square [H^1]^m, I_\delta(u_1, \dots, u_m) < 0, J(u_1, \dots, u_m) < d(\delta) \right\} \quad 0 < \delta < p+1.$$

**Теорема 2.** Предположим, что  $(u_{10}, \dots, u_{m0}) \square [H^1]^m$ ,  $(u_{11}, \dots, u_{m1}) \square [L_2(R^n)]^m$ , и выполнены условия I, II. Допустим,  $0 < e < d$ , и  $\delta_1 < \delta_2$  корни уравнения  $d(\delta) = e$ , тогда справедливы следующие утверждения:

(T2i) Если  $I(u_{10}, \dots, u_{m0}) > 0$  или  $\|u_{10}\| = \dots = \|u_{m0}\| = 0$ , то слабое решение задачи (1), (2) с начальной энергией  $E(0) \in (0, e]$  принадлежит  $W_\delta$ , где  $\delta_1 < \delta < \delta_2$ ;

(T2ii) Если  $I(u_{10}, \dots, u_{m0}) < 0$ , то слабое решение задачи (1), (2) с начальной энергией  $E(0) \in (0, e]$  принадлежит  $V_\delta$ , где  $\delta_1 < \delta < \delta_2$ .

**Теорема 3.** Предположим, что выполнены условия I, II, и  $(u_{10}, \dots, u_{m0}) \square [H^1]^m$ ,  $(u_{11}, \dots, u_{m1}) \square [L_2(R^n)]^m$ . Если  $0 < E(0) \leq e$  и  $\delta_1, \delta_2$  корни уравнения  $d(\delta) = e$ , то множества  $W_{\delta_1 \delta_2} = \bigcup_{\delta_1 < \delta < \delta_2} W_\delta$  и  $V_{\delta_1 \delta_2} = \bigcup_{\delta_1 < \delta < \delta_2} V_\delta$

инвариантны относительно траектории порожденной динамической системой (1), (2).

**Теорема 4.** Предположим, что выполнены условия I, II, и  $(u_{10}, \dots, u_{m0}) \square [H^1]^m$ ,  $(u_{11}, \dots, u_{m1}) \square [L_2(R^n)]^m$ . Если  $E(0) \leq 0$ ,  $\|u_{10}\| + \dots + \|u_{m0}\| \neq 0$ , тогда решение задачи (1), (2) удовлетворяет неравенству  $\sum_{i=1}^m \|u_i(t, \cdot)\|^2 \geq r_0$ ,

где  $r_0 = \left( \frac{p+1}{2\mu C_*^{2(p+1)}} \right)^{\frac{1}{p}}$ .

**Теорема 5.** Предположим, что выполнены условия I, II, и  $(u_{10}, \dots, u_{m0}) \square [H^1]^m$ ,  $(u_{11}, \dots, u_{m1}) \square [L_2(R^n)]^m$ ,  $E(0) \leq 0$ . Если  $(u_1(t_0, \cdot), \dots, u_m(t_0, \cdot)) \in W_\delta$  в некоторой точке  $t = T_0 \in [0, T_{\max}]$ , то  $T_{\max} = +\infty$  и для  $(u_1(t, x), \dots, u_m(t, x))$  имеет место априорная оценка

$$\sum_{i=1}^m \left[ \|\dot{u}_i(t, \cdot)\|^2 + \|u_i(t, \cdot)\|^2 \right] \leq \frac{2d(p+1)}{p}, \quad t \in [0, T_{\max}].$$

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия I, II, и  $(u_{10}, \dots, u_{m0}) \square [H^1]^m$ ,  $(u_{11}, \dots, u_{m1}) \square [L_2(R^n)]^m$ . Если  $0 < E(0) < d$  и  $I_{\delta_2}(u_{10}, \dots, u_{m0}) > 0$  или  $\|u_{10}\| + \dots + \|u_{m0}\| = 0$ , где  $\delta_1 < \delta_2$  корни уравнения  $d(\delta) = E(0)$ , то задача (1)-(2) имеет единственное решение  $(u_1(t, \cdot), \dots, u_m(t, \cdot)) \in C([0, \infty); [H^1]^m) \cap C^1([0, \infty); [L_2(R^n)]^m)$  и  $(u_1(t, \cdot), \dots, u_m(t, \cdot)) \in W_\delta$ ,  $\delta_1 < \delta < \delta_2$ .

**Теорема 7.** Предположим, что выполнены условия I, II. Пусть  $(u_{10}, \dots, u_{m0}) \square [H^1]^m$ ,  $(u_{11}, \dots, u_{m1}) \square [L_2(R^n)]^m$ ,  $0 < E(0) < d$ ,  $I(u_{10}, \dots, u_{m0}) > 0$  или  $\|u_{10}\| + \dots + \|u_{m0}\| = 0$ . Тогда существуют такие  $k > 0$ ,  $K > 0$ , что имеет место оценка

$$E(t) \leq Ke^{-kt}, \quad t \in [0, +\infty).$$

### 3. Доказательство.

Доказательство Лемм 1 и 2, а также Теорем 1-6 проводится аналогично, как это было сделано в работе [9].

Доказательство Теоремы 7.

Пусть  $(u_1(t, x), \dots, u_m(t, x))$  глобальное решение задачи (1), (2). В силу Теоремы 2  $(u_1(t, \cdot), \dots, u_m(t, \cdot)) \in W_\delta$ ,  $\delta_1 < \delta < \delta_2$ ,  $0 \leq t < +\infty$ , где  $\delta_1, \delta_2$  корни уравнения  $d(\delta) = E(0)$ . Так как

$$\dot{E}(t) = -\sum_{i=1}^m |u_i(t, \cdot)|^2$$

имеем

$$\frac{d}{dt}(e^{\gamma t} E(t)) + e^{\gamma t} \sum_{i=1}^m |\dot{u}_i(t, \cdot)|^2 = \gamma e^{\gamma t} E(t).$$

Отсюда, интегрируя, получим

$$e^{\gamma t} E(t) + \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\gamma \tau} |\dot{u}_i(\tau, \cdot)|^2 d\tau = E(0) + \gamma \int_0^t e^{\gamma \tau} E(\tau) d\tau. \quad (4)$$

В силу того, что  $(u_1(t, \cdot), \dots, u_m(t, \cdot)) \in W_\delta$

$$E(t) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} |\dot{u}_i(t, \cdot)|^2 + \frac{p}{2(p+1)} \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 + \frac{1}{2(p+1)} I(u_1, \dots, u_m).$$

Следовательно, имеем

$$E(t) \geq \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} |\dot{u}_i(t, \cdot)|^2 + \frac{p}{2(p+1)} \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2. \quad (5)$$

С учетом (1), справедливо тождество

$$I(u_1, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^m \|\dot{u}_i(t, \cdot)\|^2 - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m [\langle \dot{u}_i, u_i \rangle] + \frac{1}{2} |u_i|^2.$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} I(u_1, \dots, u_m) &= (1 - \delta_1) \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 + \delta_1 \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 - \\ &= \sum_{i,j=1}^m a_{ij} |u_i u_j|_{p+1}^{p+1} = (1 - \delta_1) \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2 + I_{\delta_1}(u_1, \dots, u_m). \end{aligned} \quad (6)$$

Так как  $(u_1(t, \cdot), \dots, u_m(t, \cdot)) \in W_\delta$ ,  $\delta_1 < \delta < \delta_2$ ,  $0 \leq t < +\infty$ , ясно, что  $I_{\delta_1}(u_1, \dots, u_m) \geq 0$ .

Из (6) следует, что

$$I(u_1, \dots, u_m) > (1 - \delta_1) \sum_{i=1}^m \|u_i\|^2. \quad (7)$$

Учитывая (3) и (7), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\gamma\tau} E(\tau) d\tau &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\gamma\tau} \left[ \|\dot{u}_i(\tau, \cdot)\|^2 + \|u_i(\tau, \cdot)\|^2 \right] d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\gamma\tau} \|\dot{u}_i(\tau, \cdot)\|^2 d\tau + \frac{1}{2(1-\delta_1)} \int_0^t e^{\gamma\tau} I(u_1(\tau, \cdot), \dots, u_m(\tau, \cdot)) d\tau = \\ &= \frac{2-\delta_1}{2(1-\delta_1)} \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\gamma\tau} \|\dot{u}_i(\tau, \cdot)\|^2 d\tau - \frac{1}{2(1-\delta_1)} \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\gamma\tau} \frac{d}{d\tau} \left[ \langle \dot{u}_i(\tau, \cdot), u_i(\tau, \cdot) \rangle + \frac{1}{2} \|u_i(\tau, \cdot)\|^2 \right] d\tau = \\ &= \frac{2-\delta_1}{2(1-\delta_1)} \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\gamma\tau} \|\dot{u}_i(\tau, \cdot)\|^2 d\tau + \frac{1}{2(1-\delta_1)} \sum_{i=1}^m \left[ \langle u_{i1}, u_{i0} \rangle + \frac{1}{2} \|u_{i0}\|^2 \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2(1-\delta_1)} \sum_{i=1}^m e^{\gamma t} \left[ \langle \dot{u}_i(t, \cdot), u_i(t, \cdot) \rangle + \frac{1}{2} \|u_i(t, \cdot)\|^2 \right] + \\ &\quad + \frac{\gamma}{2(1-\delta_1)} \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\gamma\tau} \left[ \langle \dot{u}_i(\tau, \cdot), u_i(\tau, \cdot) \rangle + \frac{1}{2} \|u_i(\tau, \cdot)\|^2 \right] d\tau. \end{aligned}$$

После определенных оценок отсюда получим

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\gamma\tau} E(\tau) d\tau &\leq \frac{1}{4(1-\delta_1)} \left[ \|u_{i1}\|^2 + 2\|u_{i0}\|^2 \right] + \frac{1}{4(1-\delta_1)} \sum_{i=1}^m e^{\gamma t} \left[ \|\dot{u}_i(t, \cdot)\|^2 + 2\|u_i(t, \cdot)\|^2 \right] + \\ &\quad + \frac{\gamma}{2(1-\delta_1)} \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\gamma\tau} \left[ \|\dot{u}_i(\tau, \cdot)\|^2 + 2\gamma\|u_i(\tau, \cdot)\|^2 \right] d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (4) и (8) следует

$$\begin{aligned} e^{\gamma t} E(t) + \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\gamma\tau} \left[ \|\dot{u}_i(\tau, \cdot)\|^2 d\tau \right] &\leq E(0) + \frac{\gamma}{4(1-\delta_1)} \left[ \|u_{i1}\|^2 + 2\|u_{i0}\|^2 \right] + \\ &\quad + \frac{\gamma}{4(1-\delta_1)} \sum_{i=1}^m e^{\gamma t} \left[ \|\dot{u}_i(t, \cdot)\|^2 + 2c_0 \|u_i(t, \cdot)\|^2 \right] + \\ &\quad \frac{\gamma^2}{2(1-\delta_1)} \sum_{i=1}^m \int_0^t e^{\gamma\tau} \left[ \|\dot{u}_i(\tau, \cdot)\|^2 + 2\gamma c_0 \|u_i(\tau, \cdot)\|^2 \right] d\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $c_0$  норма оператора вложения  $H^1 \subset L_2(R^n)$ .

Выбираем  $\gamma$  так чтобы

$$\frac{\gamma}{4(1-\delta_1)} \leq \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Тогда, с учетом, (8) и (9) получим

$$e^{\gamma t} E(t) \leq \left( \frac{\gamma}{2} + 2 \right) E(0) + \gamma^2 c_1 \int_0^t e^{\gamma \tau} E(\tau) d\tau,$$

где  $c_1$  не зависит от  $t > 0$  и  $\delta > 0$ .

Применяя Лемму Гронуола имеем

$$e^{\gamma t} E(t) \leq c_2 E(0) e^{c_3 \gamma^2 t},$$

т.е.

$$E(t) \leq c_2 E(0) e^{-\gamma(1-c_3\gamma)t}, \quad (11)$$

где  $c_2 = \frac{\gamma+4}{2}$ ,  $c_3 = c_1 \gamma^2$ .

Если выбрать  $\gamma < \min\{c_3, 2(1-\delta_1)\}$ , то из (10) и (11) получим утверждение Теоремы 7.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Segal I. Non-linear semi-groups. *Annals of Mathematics*, vol.78, no.2, 1963, pp.339-364.
2. Medeiros L.A., Miranda M.M. Weak solutions for a system of nonlinear Klein-Gordon equations. *Annali di Matematica, Pura ed Applicata*, vol.146, no.1, 1986, pp.173-183.
3. Medeiros L.A., Perla Menzala G. On a mixed problem for a class of nonlinear Klein-Gordon equations. *Acta Mathematica Hungarica*, vol.52, no.1, 1988, pp.61-69.
4. Makhankov V.G. Dynamics of classical solutions (in non-integrable systems) *Physics Reports*, vol.35, 1978, pp.1-128.
5. Zhang J. On the standing wave in coupled non-linear Klein-Gordon equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol.26, no.1, 2003, pp.11-25.
6. Liu W. Global Existence, Asymptotic Behavior and Blow-up of Solutions for Coupled Klein-Gordon Equations with Damping Terms. *Nonlinear Anal.*, vol.73, no.1, 2010, pp.244-255.
7. Aliev A.B., Kazimov A.A. Nonexistence of global solutions of the Cauchy problem for systems of Klein-Gordon equations with positive initial energy. *Diferential Equations*, vol.51, no.12, 2015, pp.1563-1568.
8. Алиев А.Б., Казимов А.А. Существование и не существование глобальных решений задачи Коши для систем Клейна-Гордона. *Доклады АН России*, 214, т.459, №2, с.1-3.
9. Aliev A.B., Yusifova G.I. The Existence and Nonexistence of Global Solutions of the Cauchy Problem for Systems of Three Semilinear Klein-Gordon Equations. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol.8, no.1, 2018.
10. Aliev A.B., Shafiyeva G.Kh. On potential wells and global solvability of the Cauchy problem for system of semi-linear Klein-Gordon equations with dissipation. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, vol.45, no.1, 2019, pp. 119-136.
11. Alvino A., Trombetti G., Lions P.-L. Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization. *Annales de l'I.H.P.*, section C, vol.7, no.2, 1990, pp.37-65.
12. Kesavan S. Symmetrization and applications. *Series in Analysis*, vol.3, 2006, 160pp.

# KLEİN-QORDON TƏNLİKLƏR SİSTEMLƏRİNİN QLOBAL HƏLLİNİN VARLIĞI VƏ ASİMPTOTİKASI

G.ŞƏFİYEVƏ

## XÜLASƏ

İşdə qeyri-xətti ümumi fokuslaşmış yarımxətti Klein-Qordon tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinə baxılmışdır. Potensial çuxur və uyğun Koşi məsələsinin qlobal həllolunanlığı, həmçinin  $t \rightarrow +\infty$  tam enerjinin asimptotik davranışı tədqiq olunur.

**Açar sözlər:** Klein-Qordon sistemi, Koşi məsələsi, potensial çuxur, qlobal həllolunanlıq

## EXISTENCE AND ASYMPTOTIC OF GLOBAL SOLUTIONS OF THE SYSTEMS OF KLEIN-GORDON EQUATIONS

G.SHAFIYEVƏ

## SUMMARY

The Cauchy problem for semilinear systems of Klein-Gordon equations with a common focusing nonlinearity is considered. The potential hole and the global solvability of the corresponding Cauchy problem are investigated, as well as the asymptotic behavior of the total energy as  $t \rightarrow +\infty$ .

**Keywords:** systems of Klein-Gordon, Cauchy problem, potential hole, global solvability

*Поступила в редакцию: 10.09.2019 г.*

*Подписано к печати: 28.12.2019 г.*

УДК 517.177.52

## НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**Ж.Б.АХМЕДОВА<sup>\*</sup>, И.Ф.НАГИЕВА<sup>\*\*</sup>**

<sup>\*</sup>*Бакинский Государственный Университет*

<sup>\*\*</sup>*Институт Систем Управления НАН Азербайджана*

*akja@rambler.ru, ilaha\_21@mail.ru*

*В работе рассматривается одна задача оптимального управления дискретными системами с запаздыванием. Доказаны необходимые условия оптимальности первого порядка при различных предположениях.*

**Ключевые слова:** Аналог задачи Н.Н.Моисеева, формула приращения, функционал качества, необходимое условие оптимальности, дискретный принцип максимума.

**Введение.** В работе [1] Н.Н.Моисеев рассмотрел одну нетиповую задачу оптимального управления, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В предлагаемой работе изучается дискретный вариант задачи из [1], при наличии в уравнении описывающий процесс запаздывания по состоянию. Установлены необходимые условия оптимальности первого порядка.

**Постановка задачи.** Рассмотрим управляемый процесс, описываемый следующей системой нелинейных разностных уравнений с запаздыванием

$$x(t+1) = f(t, x(t), x(t-N), u(t)), \quad t \in t_0, t_0 + t_1, \dots, t_1 - 1, \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t_0 - N) = x_{t_0 - N}, \dots, x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Здесь  $N$  – заданное натуральное число,  $f(t, x, y, u)$  – заданная  $n$ -мерная вектор-функция, непрерывная по  $(x, y, u)$  вместе с частными производными по  $(x, y)$  при всех  $t, t_0, t_1, x_{t_0 - N}, \dots, x_0$  заданы, а  $u(t)$  –  $r$ -мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества  $U \subset R^r$ , т.е.

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T. \quad (3)$$

Такие управления будем называть допустимыми управлениями. Рассмотрим задачу о минимуме функционала



$$S(u) = \varphi(x(t_1)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} F(t, s, x(t), x(s)), \quad (4)$$

при ограничениях (1)-(3), при предположении, что оптимальное управление существует. Здесь  $\varphi(x)$  заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция, а  $F(t, s, a, b)$  заданная скалярная функция, непрерывная по  $(a, b)$  при всех  $t, s$ .

Допустимое управление  $u(t)$ , доставляющее минимальное значение функционалу (4), при ограничениях (1)-(3) назовем оптимальным управлением.

Целью работы является вывод необходимых условий оптимальности первого порядка в рассматриваемой задаче.

**Формула приращения качества.** Пусть  $u(t), \bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$  два допустимых управления, а  $x(t)$  и  $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$  соответствующие им траектории основной начальной задачи (1)-(2). Тогда приращение функционала качества (4) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = & [\varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1))] + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} [F(t, s, \bar{x}(t), \bar{x}(s)) - F(t, s, x(t), x(s))], \end{aligned} \quad (5)$$

а приращение  $\Delta x(t)$  траектории  $x(t)$  будет удовлетворять уравнению

$$\Delta x(t+1) = f(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-N), \bar{u}(t)) - f(t, x(t), x(t-N), u(t)), \quad (6)$$

$$\Delta x(t_0 - N) = 0, \dots, \Delta x(t_0) = 0. \quad (7)$$

Считая  $\psi(t)$  пока неизвестной  $n$ -мерной вектор-функцией положим

$$H(t, x, y, u, \psi) = \psi' f(t, x, y, u).$$

Принимая во внимание выражение функции Гамильтона-Понтрягина, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) \Delta x(t+1) = \\ & = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-N), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), x(t-N), u(t), \psi(t))]. \end{aligned}$$

Поэтому, принимая во внимание (6), (7) и введенное обозначение из (5) будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & [\varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1))] + \psi'(t_0 - 1) \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1) \Delta x(t) + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} [F(t, s, \bar{x}(t), \bar{x}(s)) - F(t, s, x(t), x(s))] - \end{aligned}$$

$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{x}(t-N), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), x(t-N), u(t), \psi(t))] \quad (8)$$

Положим по определению

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{u}(t)} H[t, \psi] &\equiv [H(t, x(t), x(t-N), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), x(t-N), u(t), \psi(t))], \\ H_x[t, \psi] &\equiv H_x(t, x(t), x(t-N), u(t), \psi(t)), \\ H_y[t, \psi] &\equiv H_y(t, x(t), x(t-N), u(t), \psi(t)), \\ f_x[t] &\equiv f_x(t, x(t), x(t-N), u(t)), \\ f_y[t] &\equiv f_y(t, x(t), x(t-N), u(t)), \\ F_a[t, s] &\equiv F_a(t, s, x(t), x(s)), \\ F_b[t, s] &\equiv F_b(t, s, x(t), x(s)). \end{aligned}$$

Учитывая введенные обозначения с помощью формулы Тейлора приращение (8) функционала качества (4) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= \varphi'_x(x(t_1)) \Delta x(t_1) + \psi'(t_1-1) \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1) \Delta x(t) - \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}(t)} H[t] - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_x[t, \psi] \Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_y[t, \psi] \Delta x(t-N) - \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [\Delta_{\bar{u}(t)} H'_x[t, \psi] \Delta x(t) + \Delta_{\bar{u}(t)} H'_y[t, \psi] \Delta x(t-N)] + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} F'_a[t, s] \Delta x(t) \\ &+ \sum_{s=t_0}^{t_1-1} F'_b[t, s] \Delta x(s) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t-N)\|) - \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} o_3(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(s)\|). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем  $\|\alpha\|$  означает норму вектора  $\alpha$ , определяемая формулой  $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ , а величина  $o(\alpha)$  есть величина более высокого порядка, чем  $\alpha$ , т.е.  $o(\alpha)/\alpha \rightarrow 0$ , при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Учитывая начальное условие (7) нетрудно доказать, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_y[t, \psi] \Delta x(t-N) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1-N} H'_y[t+N, \psi] \Delta x(t).$$

Поэтому, если предполагать, что вектор-функция  $\psi(t)$  является решением задачи (сопряженная система)

$$\psi(t_1-1) = -\varphi'_x(x(t_1)),$$

$$\psi(t-1) = H_x[t, \psi] - \sum_{s=t_0}^{t_1-1} [F_a[t, s] + F_b[s, t]], \quad t = t_1 - N, \dots, t_1 - 1,$$

$$\psi(t-1) = H_x[t, \psi] + H_y[t + N, \psi] + \sum_{s=t_0}^{t_1-1} [F_a[t, s] + F_b[s, t]], \quad t = t_0, \dots, t_1 - N,$$

то формула приращения (9) функционала качества (4) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}(t)} H[t, \psi] - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [\Delta_{\bar{u}(t)} H'_x[t, \psi] + \Delta_{\bar{u}(t)} H'_y[t, \psi]] \Delta x(t-N) + \\ & + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t-N)\|) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} o_3(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(s)\|). \end{aligned} \quad (10)$$

Предположим, что множество (множество допустимых скоростей рассматриваемой системы)

$$f(t, x(t), x(t-N), U) = \{\alpha : \alpha = f(t, x(t), x(t-N), v), v \in U\} \quad (11)$$

выпукло при всех  $t$ .

Тогда специальное приращение допустимого управления  $u(t)$  можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = v(t, \varepsilon) - u(t), \quad t \in T, \quad (12)$$

где  $\varepsilon \in [0, 1]$  произвольное число, а  $v(t, \varepsilon)$  такой вектор, что

$$\Delta_{v(t, \varepsilon)} f[t] \equiv \varepsilon \Delta_{v(t)} f[t]. \quad (13)$$

Здесь  $u(t) \in U, t \in T$  произвольный допустимый вектор.

(Это возможно в силу выпуклости множества (11))

Через  $\Delta x_\varepsilon(t)$  обозначим специальное приращение траектории  $x(t)$ , отвечающее приращению (12) управления.

Применяя аналог леммы Гронуолла-Беллмана (см. напр. [4]) получим справедливость оценки

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \leq L_1 \varepsilon, \quad t \in T, \quad (14)$$

где  $L_1 = \text{const} > 0$  некоторое постоянное.

**Необходимое условие оптимальности.** С учетом (12)-(13) из (10) получим справедливость разложения

$$S(u + \Delta u_\varepsilon) - S(u) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{v(t)} H[t, \psi] + o(\varepsilon).$$

Из полученного разложения в силу произвольности  $\varepsilon$  и  $v(t)$  сразу следует

**Теорема 1.** (аналог дискретного принципа максимума). Если множество (11) выпукло, то для оптимальности допустимого управления  $u(t)$  необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_v H[t, \psi] \leq 0 \quad (15)$$

выполнялось для всех  $v(t) \in U, t \in T$ .

Неравенство (15) является аналогом дискретного условия максимума для рассматриваемой задачи.

Непосредственным следствием теоремы 1 является

**Следствие.** При выполнении условий теоремы 1, для оптимальности допустимого управления  $u(t)$  необходимо, чтобы неравенство

$$\Delta_w H[\theta, \psi] \leq 0 \quad (16)$$

выполнялось для всех  $w \in U, \theta \in T$ . Неравенство (16) представляет собой поточечный аналог дискретного принципа максимума. Нетрудно видеть, что необходимые условия оптимальности (15), (16) эквивалентны.

**Линеаризованный принцип максимума.** Предположим, что множество  $U$  выпуклое, а  $f(t, x, y, u)$  непрерывно по  $(x, y, u)$  вместе с частными производными по  $(x, y, u)$  при всех  $t$ .

При этих предположениях приращение критерия качества () может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_2[t, \psi] \Delta u(t) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_4(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t-N)\| + \|u(t)\|) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} o_3(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(s)\|). \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть  $\mu \in [0, 1]$  произвольное число, а  $v(t) \in U, t \in T$  произвольное допустимое управление.

Тогда специальное приращение допустимого управления  $u(t)$  можно определить по формуле

$$\Delta u_\mu(t) = \mu[v(t) - u(t)]. \quad (18)$$

Через  $\Delta x_\mu(t)$  обозначим специальное приращение траектории  $x(t)$  отвечающее приращению (18) управления  $u(t)$ .

Из (1) ясно, что

$$\Delta x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^t [\Delta x(\tau+1) - \Delta x(\tau)]. \quad (19)$$

При помощи (19) применяя дискретный аналог Гронуолла-Беллмана получим, что

$$\|\Delta x_\mu(t)\| \leq L_2 \mu, \quad t \in T, \quad (20)$$

где  $L_2 = \text{const} > 0$  некоторое постоянное.

Тогда учитывая (18), (20) в формуле приращения (17) получаем справедливость разложения

$$S(u + \Delta u_\mu) - S(u) = -\mu \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u [t, \psi][v(t) - u(t)] + o(\mu).$$

Поэтому справедлива

**Теорема 2.** (аналог линеаризованного условия максимума). Если множество  $U$  выпуклое, то для оптимальности допустимого управления  $u(t)$  в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u [t, \psi][v(t) - u(t)] \leq 0 \quad (21)$$

выполнялось для всех  $v(t) \in U, t \in T$ .

Неравенство (21) есть аналог линеаризованного принципа максимума.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
2. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973, 256.
3. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2013, 151 с.
4. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1982, 400 с.

### GEÇİKMƏYƏ MALİK BİR DİSKRET OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRTLƏR

J.B.ƏHMƏDOVA, İ.F.NAĞİYEVA

#### XÜLASƏ

İşdə gecikməyə malik bir diskret optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Müxtəlif hamarlıq şərtləri daxilində optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər isbat olunmuşdur.

**Açar sözlər:** N.N.Moiseyev məsələsinin analoqu, artım düsturu, keyfiyyət funksionalı, optimallıq üçün zəruri şərt, diskret maksimum prinsipi.

#### NECESSARY CONDITIONS FOR OPTIMALITY IN ONE DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH DELAY

Zh.B.AHMEDOVA, I.F.NAGIEVA

#### SUMMARY

The paper considers one problem of optimal control of discrete systems with delay. The necessary first-order optimality conditions are proved under various assumptions.

**Keywords:** An analogue of the problem of N.N. Moiseev, increment formula, quality functional, necessary optimality condition, discrete maximum principle.

*Поступила в редакцию: 26.09.2019 г.*

*Подписано к печати: 28.12.2019 г.*

UOT 519.622.2

## FASILƏSİZ AXINDA KARBOHİDROGENLƏRİN HİDROTƏMİZLƏMƏ PROSESLƏRİNİN QEYRİ-STASİONAR TƏSİRLİ İDARƏ STRATEGİYASI

H.Ə.NAĞIYEV\*, F.A.ƏLİYEV\*\*

\*AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu;

\*\*Bakı Dövlət Universiteti

*Neft məşəli yağların və mühərrik yanacaqlarının hidrotəmizləmə proseslərinin riyazi modeli əsasında məhsulun keyfiyyət göstəriciləri meyarlı qeyri-stasionar idarə strategiyası təklif olunur. Göstərilir ki, üçfazlı mühitdə yaradılan filtrasiyalı axın şəraitində fazalararası absorbsiya, adsorbsiya və desorbsiya proseslərinin paralel mövcudluğu qeyri-stasionar idarə strategiyasının üstünlüklərini xeyli dərəcədə artırır. İmpulsiv və harmonik funksiyalar sinfindən götürülmüş idarə təsirlərindən əldə olunan dinamik rejimlər model üzərində hesablama eksperimenti aparmaqla tədqiq edilir. Bu funksiyalar bilavasitə xammalın keyfiyyəti və reaktorun məhsuldarlığı kimi mühüm texnoloji parametrlərlə əlaqədar öyrənilir.*

**Açar sözlər:** Dinamik sistem, qeyri-stasionar idarəetmə strategiyası, karbohidrogenlərin hidrotəmizlənmə prosesi, optimal keyfiyyət kriterisi.

### 1. Fasiləsiz axında həyata keçirilən texnoloji proseslər və qeyri-stasionar təsirli idarəetmə

Fasiləsiz axında həyata keçirilən texnoloji proseslərin mühüm bir xassəsi idarəetmə praktikası üçün bir çox hallarda müstəsna əhəmiyyət daşıyır. Bu xassə müəyyən zaman miqyası çərçivəsində yaradılan qeyri-stasionar rejimlərin müsbət nəticələrə səbəb ola bilməsidir. Dinamik obyektləri xarakterik vaxt adlanan bir məvhum xarakterizə edə bilir ki, bu keçid proseslərinin əsas hissəsinin müvazinətləşmiş olduğu müddətdir. Bu müddətdən sonrakı proseslər ya əhəmiyyətsiz dərəcədə zəif olduqlarından xarici küylərə və daxili fluktuasiyalara qarışaraq, hiss olunmurlar, ya da sönmə nəticəsində azalmış meyletmələr ölçü cihazlarının ölçmə dəqiqliyi çərçivəsindən aşağı olduğu üçün diqqəti cəlb etməirlər. Məsələn, xətti sistemlərdə aperiodik və ya rəqsi xarakterli keçid prosesləri eksponensial sönmə əmsalı və ya sönmə dekrementi [1] adlanan parametrlərdə öz əksini tapmış olurlar. Qeyri-xətti sistemlər üçün analoji terminlər riyazi səlisliyini saxlaya bilməsələr də, ətalət gecikməsini ifadə edən xarakterik vaxt anlamı yenə də öz gücündə qalır.

Fasiləsiz proseslərdə qeyri-stasionar rejimlərin idarəetmə baxımından diqqət mərkəzində olması əsasən onunla bağlıdır ki, bu proseslərdə müşahidə

müddəti kifayət qədər geniş intervalı əhatə edir, yəni  $t \in (0, \infty)$ . Aydındır ki, idarə funksiyası yalnız məhdud zaman çərçivəsində, başqa sözlə, dinamik obyektin xarakterik vaxt miqyasında həyata keçirilə bilər. Bu o deməkdir ki, idarə funksiyası ya xarici təsir faktorunun dəyişmə tempinə uyğun sabit saxlanılmalı, ya da xarakterik vaxt miqyası çərçivəsində periodik funksiyalar sinfindən götürülməlidir. Dəyişməz idarə strategiyasından daha geniş imkanlar çoxluğuna malik olan periodik funksiyalar, aşkardır ki, optimallıq baxımından daha məqsəduyğun olacaqdır.

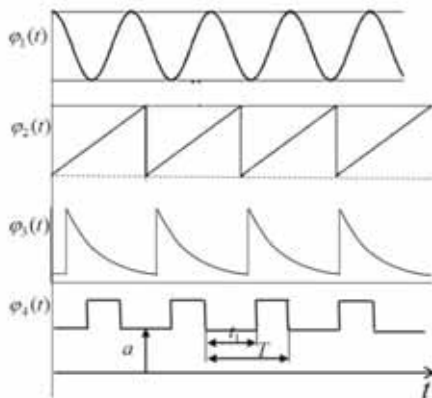
Xarici təsir faktorunun spektrində aşağı tezliklərin əsas rol oynadığı  $\Delta\omega_x$  və onların bu baxımdan prosesin xarakterik tezlik zolağı  $\Delta\omega_0$  ilə müqayisə oluna bilmədiyi, yəni  $\Delta\omega_0 = \frac{1}{T} > \Delta\omega_x$  bərabərsizliyinin ödənilməsi əksər hallarda idarə funksiyasının periodik funksiyalar sinfində  $u(t) = u(t+T)$  kimi axtarılmasının potensial üstünlüyü şübhə doğurmur.

Fasiləsiz prosesdə optimal qeyri-stasionar idarə funksiyası termini istifadə etdikdə elə periodik  $u(t) = a + \varphi(t + nT); n = 1, 2, 3..$  funksiya nəzərdə tutulacaq ki, onunla idarə olunan prosesdə aşağıdakı integral ekstremal qiymət almış olsun.

$$I^* = \underset{u(t) \in G}{ext} \int_0^T F[x_0, x(t), u(t)] dt$$

harada ki,  $x, x_0, u$  – dinamik sistemin vəziyyət dəyişəni, sistemin başlanğıc vəziyyəti vektoru və idarə təsiridir;  $F(\cdot)$  – idarəetmə prosesinin keyfiyyət göstəricisi,  $G$  – tətbiq üçün nəzərdə tutulan periodik idarə təsirləri çoxluğunu ifadə edir.

Şək. 1-də belə periodik idarə təsirləri olaraq bir neçə nümunə göstərilmişdir.



**Şək.1.** Qeyri-stasionar rejim yaratmaq məqsədi daşıyan periodik (impulsiv) funksiyalar.

Aydındır ki, şəkildə göstərilən periodik (həm də impuls xarakterli) idarə təsirlərinin riyazi quruluşunu xeyli artırmaq mümkündür. Bu və ya digər formalı idarə təsirlərinin konkret məsələ ilə əlaqəli şəkildə müəyyən edilməsi qeyri-stasionar rejimli idarə strategiyasının seçilməsində təbii yoldur. Bu məsələ bilavasitə obyektlərin fiziki mahiyyəti və texnoloji məzmunu ilə bağlı həll edilməli olur. Lakin bununla yanaşı olaraq texnoloji aspektləri ehtiva etməyən seçimlər də bir çox hallarda özünə haqq qazandıra bilər. Bu zaman qabaqcadan nəzərdə tutulmuş periodik funksiyalar çoxluğu müəyyənləşdirilir, bu funksiyaların parametrlərinin dəyişmə oblastları təyin edilir. Sonrakı mərhələ kompüter eksperimenti metodlarının tətbiqi əsasında ilk növbədə nəzərdə tutulmuş hər növ periodik funksiya üçün optimal parametrlər təyin edilir. Yalnız bundan sonra optimal nəticə yadda saxlanılaraq digər variant periodik təsir funksiyası həmin qaydada tədqiq olunur.

Qeyd edək ki, əgər optimallaşdırma sadə seçmə üsulu əsasında həyata keçiriləcək olursa və diskretləşdirmə  $M$  sayda variantı əhatə edərsə, digər tərəfdən periodik funksiyalar çoxluğu  $N$  saylıdırsa, məsələnin həlli  $M \times N$  sayda variant içərisində seçim həyata keçirmə sayəsində əldə oluna biləcəkdir. Məsələnin ölçülürünün çox böyük olmadığı hallarda məsələnin həllinə bu cür yanaşma özünü doğrulda bilər.

Lakin hesab edirik ki, konkret məsələnin fiziki (texnoloji) mahiyyəti nəzərə alınan hallarda təklif etdiyimiz metod daha çox müsbət nəticələrə yol açar bilər.

Şəkillərdə göstərilmiş periodik funksiyaların kompüter hesablama proseslərində istifadə edilməsinə xidmət edən riyazi yazılışları aşağıdakı formada qeyd edə bilərik:

$$u(t) = a + \varphi(t - nT); n = t // T;$$

harada ki, “//” işarəsi kəsr ədədin tam hissəsini ifadə edir.

Konkret periodik funksiyalara gəldikdə aşağıdakı funksiyaları qeyd edə bilərik:

1. Sinusoidal formalı periodik təsir:

$$u(t) = a + B \sin(\omega t + \beta); \quad n = t // T;$$

harada ki,  $\omega$  – bucaq tezliyi,  $B$  – amplituda,  $\beta$  – sürüşmə bucağıdır.

2. Pilləvari impulsar ardıcılığı:

$$u(t) = a + B - tg\left(\frac{B}{T}\right)(t - nT); \quad n = t // T;$$

3.  $u(t) = a + B \exp(-kt); \quad n = t // T;$

4. Düzbucaqlı impulsar ardıcılığı:

Xevisayd funksiyasından istifadə etməklə [2] ədədi üsullar əsasında məsələnin həlli üçün müsbət şərait yaranır:



$$u(t) = a + B \cdot \begin{cases} 0, & (t - nT > t_1) \& (t - nT < T); \\ 1, & (t - nT > 0) \& (t - nT < t_1); \end{cases} \quad n = t // T;$$

Qeyd edək ki, göstərilən periodik funksiyalardan 1, 2 və 3-cü ifadələr üç parametrlı, 4-cü funksiya isə dörd parametrlidir.

## 2. Karbohidrogenlərin hidrotəmizləmə proseslərinin ümumi riyazi modeli və impulsiv dinamik təsir

Karbohidrogenlərin hidrotəmizləmə prosesləri texnoloji cəhətdən az fərqlidirlər. Riyazi model etibarlı ilə bir-birindən prosesin əsas tərkib hissəsini təşkil edən desulfurlaşma reaksiyalarının sürət əmsalları ilə fərqlənilir. Hidrotəmizləmə proseslərində hədəf təkcə kükürddən təmizləmə olmayıb, bir sıra keyfiyyətə mənfi təsirlərdən də, məsələn, metal qarışıqlardan təmizləmə də özünə yer tapa bilər. Lakin belə hədəflər ümumi hədəf xarakteri daşıyır və idarəetmədə onlara maraq aparıcı rol oynamır [3].

Motor yanacaqlarının hidrotəmizləmə prosesləri Respublikamızın neft emalı sənayesinin aparıcı sahələrindən birini təşkil edir. İstehsal texnologiyasına görə fasiləsiz prosesdirlər. Ciddi sürətdə xarici təsirlərin mövcudluğu ilə xarakterizə olunsalar da, bu təsirlər qurğuların istismarı zamanı aşağı sürətlə dəyişirlər [4]. Xammal keyfiyyətinin dəyişməsi xammal çənlərinin boşalması və yeni çənə keçilməsi səbəbi ilə baş verə bilər. Proses nominal fəaliyyət şəraitində stasionar proses olaraq diqqəti cəlb edir.

Texnoloji proses stasionar katalizator təbəqəsində hidrogen tərkibli qaz və maye yanacaq (sürtgü yağı) fazalarında hidrogen iştirakı ilə kimyəvi prosesləri həyata keçirən reaktor – xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir oluna bilər. Reaktorun fəza koordinatına görə bir ölçülü model yazılışının praktiki olaraq özünü təmamilə doğrultduğunu nəzərə alaraq, həmin yazılış tədqiqatımızda əsas konstruktiv riyazi aparat olaraq qəbul edilmişdir. Reaktorun diffuziyanın nəzərə alınmaması ilə üçfazlı filtrasiyalı axın modeli aşağıdakı kimi tərtib olunmuşdur:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial t} - \frac{v_q}{S \sigma_q \rho_q} \frac{\partial p_i}{\partial x} - w_{qy} \left( \frac{P}{k_i(T)} y_i - p_i \right) &= 0; \quad i = \overline{1,3}; 1-H; 2-S; 3-H_2S \\ \frac{\partial y_i}{\partial t} - \frac{v_y}{S \sigma_y \rho_y} \frac{\partial y_i}{\partial x} + w_{qy} \left( \frac{P}{k_i(T)} y_i - p_i \right) + w_{yk}^i (b_{yk}^i y_i - z_i) &= 0 \\ \frac{dP}{dx} = \frac{\gamma}{\sigma_k} (v_y + v_q); & \\ \frac{\partial z_H}{\partial t} - w_{yk} (a_{yk} y_H - z_H) + 2z_H z_S k_0 \exp(-E/RT) &= 0 \\ \frac{\partial z_S}{\partial t} - w_{yk} (a_{yk} y_S - z_S) + z_H z_S k_0 \exp(-E/RT) &= 0 \\ \frac{\partial z_{H_2S}}{\partial t} - w_{yk} (a_{yk} y_{H_2S} - z_{H_2S}) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Bu model tənliklərində aşağıdakı işarələmələr qəbul edilmişdir:

$$\sigma_q = \frac{S_q}{(1-\sigma_k)S} - \text{yağdaxili qaz qabarcıqlarının tutduğu nisbi sahə; } \sigma_k = \frac{S_0}{S} -$$

reaktorun en kəsiyində katalizatorun tutduğu nisbi sahə;  $\sigma_y = 1 - \sigma_q$  - yağ fazasının tutduğu nisbi sahə;  $p_H, p_S, p_{H_2S}$  - qaz fazasında hidrogenin, kükürdün və hidrogen-sulfidin parsial təzyiqləri;  $y_H, y_S, y_{H_2S}$  - yağ fazasında həll olmuş hidrogenin, kükürdün və hidrogen-sulfidin qatılıqları;  $z_h, z_S$  - hidrogen, kükürd və hidrogen-sulfid maddələri ilə zəbt olunmuş aktiv mərkəzlərin nisbi miqdarı;  $v_q$  - qazın həcm sürəti;  $v_y$  - yağın həcm sürəti;  $P$  - reaktorda təzyiq;  $S, S_0, S_q$  - uyğun olaraq reaktorun en kəsiyinin ümumi sahəsi, reaktorun en kəsiyində katalizatorun tutduğu sahə və reaktorun en kəsiyində boşluqlarda qalan (yağ və qaz fazası üçün qalmış) sahələr;  $\rho_q, \rho_y$  - qaz və yağ fazalarının sıxlıqları,  $\gamma$  - filtrasiyalı axında müqavimət əmsalı;  $w_{qy}^i, w_{yk}^i$  - qaz-yağ və yağ-katalizator fazaları üçün maddə köçürülmə sürət əmsalları;  $k_i(T) = k_i^*(T - 273) + \varepsilon_i^*$ ;  $i = \overline{1,3}$  -  $i = \overline{1,3}$ ; uyğun olaraq hidrogenin, sulfidli birləşmələrin və hidrogen-sulfidin yağda həll olmasının temperatur asılılığı;  $b_{yk}^H, b_{yk}^S, b_{yk}^{H_2S}$  - hidrogen, kükürd və hidrogen-sulfidin yağ mühitindən katalizator səthinə adsorbsiya əmsalları;  $E, R, k_0, T$  - sulfidləşmə reaksiyasının aktivləşmə enerjisi, qaz sabiti, reaksiya sürət əmsalı və reaksiyanın həyata keçirildiyi temperaturdur.

Başlanğıc və sərhəd şərtləri aşağıdakı kimi verilir:

$$t = 0 \quad \text{olduqda}$$

$$p_i(x,0) \equiv p_{i0}; \quad y_i(x,0) \equiv y_{i0}; \quad z_i(x,0) \equiv z_{i0};$$

$$x = 0 \quad \text{olduqda}$$

$$p_i(0,t) \equiv p_{i0}(t); \quad y_i(0,t) = y_{i0}(t); \quad z_i(0,t) = z_{i0}(t);$$

Bu riyazi modelə periodik idarə təsirlərindən yaranan reaksiyanı əks etdirmək imkanı vermək üçün maddə və istilik balans tənliklərinin yazılışına aşağıdakı əlavələr edilmişdir:

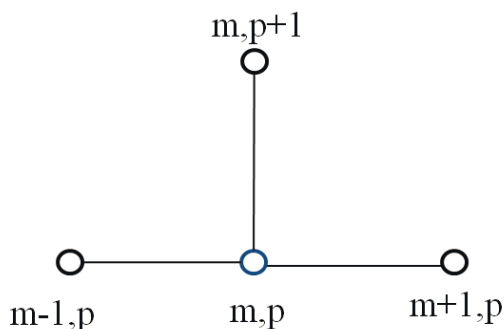
$$\frac{\partial p_i}{\partial t} - \frac{v_{q0} [1 + u_1 \sin(\omega t)]}{S \sigma_q \rho_q} \frac{\partial p_i}{\partial x} - w_{qy} \left( \frac{P}{k_i(T)} y_i - p_i \right) = 0; \quad i = \overline{1,3}$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} - \frac{v_{y0} [1 + u_2 \sin(\omega t + \varphi)]}{S \sigma_y \rho_y} \frac{\partial y_i}{\partial x} + w_{qy} \left( \frac{P}{k_i(T)} y_i - p_i \right) + w_{yk}^i (b_{yk}^i y_i - z_i) = 0 \quad (2)$$

harada ki,  $Z_i$  - dəyişənləri (1) tənliklər sistemi ilə müəyyən olunurlar.

Qeyd edək ki, (2) tənliklərində əlavə olaraq dörd variasiya oluna biləcək parametr iştirak edir: -  $u_1, u_2, \omega, \varphi$ . Bu parametrlər sinusoidal idarə təsirini həm hidrogen tərkibli qaz, həm də xammal üzrə eyni tezliklə, lakin müxtəlif amplituda və faza sürüşməsi ilə həyata keçirməyə imkan verirlər.

Dördnöqtəli aşkar sxem əsasnda sonlu fərqlər sisteminin hesablanmasına əsasən model məsələ həll edilmiş və temperatur və kükürdlülük göstəricisinin reaktor boyu paylanması zaman üzrə təkamülünü əks etdirən həllər əldə edilmişdir.



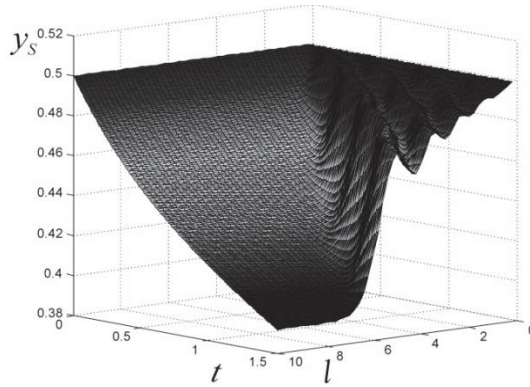
Şək. 2. Aşkar sxem üzrə işləyən dördnöqtəli şablon.

Şək.2-də modelin diferensial tənliklərin hesablamada üsulu ilə həlli üçün istifadə olunmuş şablon göstərilmişdir. Bu şablon diffuziya ilə maddə köçürülməsi prosesini əks etdirən modellərin hesablanmasında özünü yaxşı göstərir.

Qeyd edək ki, yalnız ümumi mülahizələrə istinad edən belə bir mövqə tam əsaslı sayıla bilər ki, qeyri-stasionar rejimlərin, başqa sözlə dinamik sistemlərin zaman üzrə məcburi hərəkətlərinin tədqiqindən irəli gələn optimallıq daha məhdud çərçivədə, yəni yalnız stasionar rejimlər çərçivəsində axtarılan optimallıqdan aşkar üstünlüyə malik olmalıdırlar. Nəzəri baxımdan xüsusi isbatə ehtiyacı olmayan bu müddəanın konkret olaraq bu və ya digər fiziki effektlə əlaqələndirmək hər zaman mümkün olmasa da belə izahların (fiziki cəhətdən interpretasiyanın) verilməsinə həmişə xüsusi maraq mövcud olmuşdur [5]. Kimya texnologiyası proses və aparatları sahəsində çalışan mütəxəssislər iri sənaye obyektlərinin işə buraxılması, dayandırılması zamanı meydana çıxan qeyri-stasionar rejimlərin modelləşdirilməsinə yönəldikləri diqqəti sonralar optimal idarəmə məqsədi daşıyan və məqsədyönlü surətdə dinamik rejimlərin yaradılmasına yönəlmiş oldular [6].

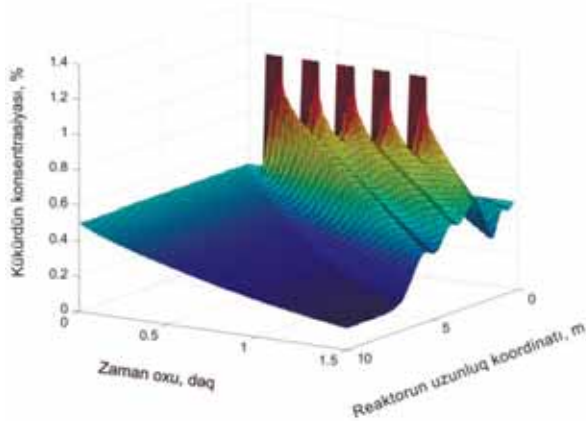
Apardığımız tədqiqatda katalitik sistemdə maddəköçürülmə proseslərinin çox mürəkkəb mexanizm üzrə, yəni adsorbsiya, desorbsiya, kimyəvi reaksiya aktlarının paralel və əlaqəli inkişafı ilə həyata keçdiyini nəzərə alsaq, deyə bilərik ki, optimal rejimlərin dinamikada axtarışı bu proseslər üçün ümumən çox perspektivli olmalıdır.

Şək.3-də hidrotəmizləmə reaktorunun girişinə verilən xammalın həcm sürətinin periodik olaraq dəyişdirilməsindən alınan qeyri-stasionar rejim əks olunmuşdur.



Şək.3. Kükürlü birləşmələrin parsial təzyiqinin qeyri-stasionar rejimə uyğun reaktorboyu paylanması.

Şək. 4-də emal olunan xammalın kükürlülük dərəcəsinin impulsiv dəyişməsindən yaranan qeyri-stasionar rejim göstərilmişdir. Diffuziyanın mövcud olduğu səbəbindən reaktorun girişində impuls forması daşıyan kükürlülük fiziki reaktorun orta hissəsində xeyli hamarlaşmışdır.



Şək. 4. Girişdə emal olunan xammalın kükürlülük dərəcəsinin impulsiv dəyişməsindən yaranan qeyri-stasionar rejim.

Reaktora verilən xammalın sərfinin dəyişdirilməsi idarəetmə baxımından daha çox maraq doğurur. Şəkildə impuls dərinliyi 2-yə bərabər olan periodik təsirdən əldə edilmiş keçid prosesi qrafik olaraq göstərilmişdir.

Beləliklə, karbohidrogenlərin hidrotəmizləmə prosesləri üçün həyata keçirdiyimiz model tədqiqi göstərir ki, qeyri-stasionar (impulsiv) təsirli idarə strategiyası optimallıq amilinin həyata keçirilməsi baxımından yüksək səmərəliliyə malikdir.

## **Nəticə**

Fasiləsiz axında həyata keçirilən dinamik proseslərin qeyri-stasionar rejimləri sahəsində apardığımız təhlil faktlar əsasında o qənaətə gəlməyə əsas vermişdir ki, belə rejimlərin süni surətdə yaradılması müsbət nəticələr verir. Yaradılması texniki baxımdan problemsiz həyata keçirilə bilən bu tip idarə tədbiri fasiləsiz axında həyata keçirilən bir çox dinamik proseslərin idarə olunmasına asanlıqla tətbiq oluna bilər.

Hidrotəmizləmə reaktorunda xammalla yükləməni periodik və impulsiv rejimdə həyata keçirmələr, süni qeyri-stasionar rejimlər yaradaraq, obyektin dinamik xassələrini aşkar etmək qarşıya qoyulan problem baxımından məqsədəuyğundur. Müxtəlif amplituda və tezliklərlə yaradılan qeyri-stasionar rejimlərin yekun göstəricilərinin hiss olunacaq dərəcədə yüksəltdiyi aşkar olunmuşdur.

## **ƏDƏBİYYAT**

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: URSS, 2019, 500 с.
2. Rüstəmov Q.Ə. Avtomatik tənzimləmə nəzəriyyəsi. Bakı: Elm və təhsil, 2012.
3. Юсифов Р.Ю., Мовсумов В.Г., Мамедова Т.К., Нагиев А.Г., Кулиев М.А. Математическое моделирование промышленного процесса гидроочистки нефтяных фракций.// «Азербайджанское нефтяное хозяйство», 1987, № 7, С. 49-51.
4. Слинько М.Г. Математическое моделирование сложных химических систем. Труды конференции «Химреактор-IV», 1971.С.184. 129.
5. Матрос Ю.Ш. Каталитические Процессы в Нестационарных Условиях. Новосибирск: Наука, 1987, 322с.
6. Wilson B., Sherrington D.C., Ni X. Butylation of Phenylacetonitrile in an Oscillatory Baffled Reactor.Ind. Eng. Chem. Res. 2005; 44:8663–8670.

## **СТРАТЕГИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ ГИДРООЧИСТКИ УГЛЕВОДОРОДОВ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИХСЯ В НЕПРЕРЫВНОМ ПОТОКЕ**

**Г.А.НАГИЕВ, Ф.А.АЛИЕВА**

### **РЕЗЮМЕ**

Предлагается метод нестационарного управления по критерию качества выходного продукта технологического процесса гидроочистки углеводородов нефтяного происхождения. Показывается, что параллельное сосуществование процессов абсорбции, адсорбции и десорбции в трехфазной системе в условиях фильтрационного течения очищаемого сырья через неподвижный слой твердого катализатора повышает эффективность процесса. Вычислительные эксперименты, проведенные с использованием периодически действующих импульсных и гармонических воздействий, может повысить эффективность нестационарных управлений по критерию качества выходного продукта гидроочистки углеводородов.

**Ключевые слова:** Динамическая система, стратегия нестационарного управления, процесс гидроочистки, критерий оптимизации качества.

# STRATEGY FOR NON-STATIONARY CONTROL OF THE PROCESSES OF HYDROCARBON TREATMENT CARRIED OUT IN A CONTINUOUS FLOW ANNOTATION

H.A.NAGIEV, F.A.ALIEVA

## SUMMARY

A method of non-stationary control according to the quality criterion of the output product of the technological process of hydrotreating of petroleum origin hydrocarbons is proposed. It is shown that the parallel coexistence of absorption, adsorption and desorption processes in a three-phase system under conditions of filtration flow of the purified raw material through a fixed bed of solid catalyst increases the efficiency of the process. Computational experiments carried out with the use of periodically acting impulse and harmonic actions can increase the efficiency of non-stationary controls in terms of the quality criterion of the output product of hydrocarbon hydrotreating.

**Key words:** Dynamic system, non-stationary control strategy, hydrotreating process, quality optimization criterion.

*Redaksiyaya daxil oldu: 02.07.2019-cu il*  
*Çapa imzalandı: 28.12.2019-cu il*

УДК.539.21

**ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ПУЗЫРЬКОВОЙ  
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ВЯЗКОУПРУГОЙ ТРУБЕ****Э.Т.КИЯСБЕЙЛИ\***, **Р.С.АКПЕРЛИ\*\*****\*Бакинский Государственный Университет****\*\*Азербайджанский университет Архитектуры и Строительства  
akbarli89@mail.ru**

*В этой статье исследуется пульсирующий поток сжимаемого двухфазного пузыря вязкой жидкости, содержащегося в упругой трубе с прямой осью. В работе были использованы одномерные линейные уравнения. Предполагается, что трубка жестко закреплена к определенной среде. В случае конечной длины давление прикладывается на торцы его граней. В ограниченном процессе отношения получаются для очень длинной трубки. Такое описание в некотором смысле обобщает и усиливает работу такого типа. В численном эксперименте рассматривается полубесконечная трубка с проточной водой, содержащей небольшое количество пузырьков воздуха. Определено влияние объемного содержания пузырьков на волновые характеристики. Поставленная задача решается применением теории функций комплексных переменных.*

**Ключевые слова:** двухфазная жидкость; вязкость; пульсирующее течение; волна.

**Введение.** Проблема распространения волн в деформируемых оболочках с текучей средой в их полостях достаточно популярна. При рассмотрении задачи такого рода следует поощрять рассмотрение уравнений движения оболочки, учитывающих влияние движения жидкости в нем. Предполагается, что одномерное приближение применимо, когда длина трубки намного больше ее радиуса. Такое приближение описывает основные свойства системы «оболочка-жидкость». На сегодняшний день в совокупности таких проблем хорошо развита область гидродинамики. Однако механизм явлений, связанных с одновременным рассмотрением двухфазной жидкости в отсеке с учетом ее сжимаемости, вязкости и ортотропии материала трубки, не совсем понятен. Интерес к проблемам волновой динамики пузырьков жидкостей, протекающих в деформируемых трубках, обусловлен важностью применения результатов исследований к задачам расчета гидравлических систем в самолетостроении, нефтегазовой промышленности, химической технологии, термодинамике.

## МЕТОД. Основные проблемы.

Замкнутая система уравнений состоит из гидравлических уравнений движения жидкости и трубок, а также непрерывности скоростей компонентов уравнений на границе раздела жидкость-трубки.

- Пузырьки присутствуют в форме сферических включений одинакового радиуса  $r_0$  в каждом элементарном макрообъеме. Кроме того, объем концентрации пузырьков  $a_{20}$  невелик (смесь монодисперсная) и значение  $r_0$  намного меньше, чем характерный размер рассматриваемой системы;

- Прямое взаимодействие и столкновение пузырьков друг с другом можно игнорировать;

- процессы слияния (коагуляции) и образования новых пузырьков отсутствуют;

- Скорость пузырьков и несущей фазы одинаковы;

- Пузырьки имеют нейтральную плавучесть, то есть не оседают и не всплывают;

- Вязкость несущей фазы намного больше, чем вязкость пузырьков газа (например, вязкость воды в 10 раз больше, чем вязкость воздуха) и, следовательно, вязкость смеси практически не зависит от объемного содержания пузырьков.

**Теоретические основы.** В рамках сделанных допущений, уравнения гидродинамики состоят из уравнения импульсов

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

уравнения неразрывности [1, 2, 4]

$$\frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

и реологического уравнения смеси [2, 3]

$$p = a^2 \rho + \frac{\xi}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3)$$

В уравнениях (1) – (3)  $u(x,t)$  – скорость течения смеси,  $p(x,t)$  – гидродинамическое давление,  $\rho(x,t)$  – плотность смеси

$$a^2 = \frac{1}{\alpha_{20}(1-\alpha_{20})} \left( \frac{\rho_{10}}{\rho_{10} - \rho_{20}} \right)^2 \frac{p_0}{\rho_{10}} \quad (4)$$



квадрат скорости распространения звука,

$$\rho_0 = \alpha_{10}\rho_{10} + \alpha_{20}\rho_{20} \quad (\alpha_{10} + \alpha_{20} = 1), \quad (5)$$

а

$$\xi = \frac{3}{4} \frac{\mu(1 - \alpha_{20})}{\alpha_{20}} \quad (6)$$

объемная вязкость, в которой  $\mu$  – динамическая вязкость несущей фазы. Здесь  $\alpha_{20}$  – объемное содержание пузырьков,  $\rho_{10}$ ,  $\rho_{20}$  – соответственно плотности несущей и дисперсной фазы,  $p_0$  – задаваемое статическое давление. Индекс 0 внизу означает значение параметра в равновесном состоянии. Необходимо заметить, что в линейной постановке вместо текущей объемной концентрации  $\alpha_2$  используется равновесная  $\alpha_{20}$ , а данный подход априори подразумевает наличие пузырьков ( $\alpha_{20} \neq 0$ ). Если объемное содержание пузырьков достаточно мало, ( $\alpha_{20} \ll 1$ ), то среда может рассматриваться как однородная. Особенностью такой жидкости при  $\rho_{20} \ll \rho_{10}$  является то, что

$$\rho_0 = \alpha_{10}\rho_{10} + \alpha_{20}\rho_{20} \approx \alpha_{10}\rho_{10} \approx \rho_{10}. \quad (7)$$

Это обстоятельство позволяет с достаточной степенью точности переписать формулы (4) и (6) следующим образом:

$$a^2 \approx \frac{p_0}{\alpha_{20}\rho_{10}}, \quad \xi = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\alpha_{20}}. \quad (8)$$

При этом, как это следует из первой формулы (8), сжатие смеси происходит только за счет её газовой составляющей.

#### **Уравнение движения оболочки.**

Предположим, что в невозмущенном состоянии имеется цилиндрическая прямолинейная трубка с радиусом  $R$  и толщиной  $h$ . Далее запишем уравнение движения трубки, предполагая, что материал стенки упругий ортотропен, фракция  $h/R \ll 1$ , и трубка жестко прикреплена к определенной среде. В этих условиях достаточно использовать следующее уравнение:

$$p = \frac{hE_2}{(1 - \nu_1\nu_2)R^2} w + \rho_* h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (9)$$

где  $\rho_*$  - плотность стенки,  $E_2$  – тангенсальный модуль Юнга,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  - коэффициенты Пуассона, где  $E_2\nu_1 = E_1\nu_2$ . Второй член в (9) - это инерция трубки. Его влияние как правило, считается незначительным:

$$w = \frac{(1 - \nu_1\nu_2)R^2}{hE_2} p. \quad (10)$$

Таким образом, мы можем предположить, что уравнение (1) - (3) и (10) представляют собой замкнутую систему гидроупругости, которую можно использовать для описания эволюции малых возмущений в трубе, содержащей газ и жидкие среды.

Полученные уравнения решаем с помощью  $\rho(x, t)$ . Для этого поступим следующим образом: с помощью уравнений (1) и (2) исключая функцию  $u(x, t)$ , получаем:

$$\frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0.$$

Учитывая (10) и (3) получим:

$$\left(1 + \frac{a^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\xi}{c_0^2 \rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^3} - a^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\xi}{\rho_0} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (11)$$

где  $c_0^2 = \frac{hE_2}{2\rho_0(1 - \nu_1\nu_2)R}$ .

Теперь дальнейший ход анализа заключается в уменьшении решения дифференциального уравнения в частных производных (11) к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

### **Результаты. Решение волнового уравнения.**

Гармонический анализ используется для описания сложных импульсов, характерных для волновых движений, то есть импульсы сложной структуры разбиваются на синусоидальные компоненты, которые образуют ряд Фурье. Из-за линейности и однородности определяющего уравнения прослеживается происхождение каждой гармоники с частотой  $n\omega$ . Здесь  $n$  натуральное число. Поэтому мы можем заключить, что рассмотрение чисто синусоидальных колебаний с заданной частотой  $\omega$  является критически важным. Поэтому, используя метод разделения переменных, мы можем искать решение уравнения (10) в следующем классе функций:

$$\rho(x, t) = y(x) \exp(i\omega t). \quad (12)$$

Здесь  $y(x)$  - неизвестный, в общем случае комплексная функция, а  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица. Подставляя (12) в (11), вводя обозначения:

$$\delta^2 = \frac{m_1 + im_2}{a^2 + im_3}, \quad (13)$$

в котором

$$m_1 = \omega^2 \left(1 + \frac{a^2}{c_0^2}\right), m_2 = \xi \frac{\omega^3}{\rho_0 c_0^2}, m_3 = \xi \frac{\omega}{\rho_0}$$

в результате находим:

$$y'' + \delta^2 y = 0. \quad (14)$$

Здесь  $y''$  - вторая производная от  $y$  по координате  $x$ . Отделяя уравнение дисперсии на действительную и мнимую части, напомним следующее:

$$\delta^2 = \frac{m_1 a^2 + m_2 m_3}{a^4 + m_3^2} - i \frac{m_1 m_3 - m_2 a^2}{a^4 + m_3^2} = k_1 - ik_2.$$

Отсюда следует

$$\delta = \pm(\delta_0 - i\delta_1),$$

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{r+k_1}{2}}, \delta_1 = \sqrt{\frac{r-k_1}{2}},$$

где,

$$(r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}).$$

Общее решение уравнения (14) имеет вид хорошо известен и записывается как:

$$y = Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}$$

где  $A, B$  - постоянные интегрирования в общем случае комплексные, которые определяются из граничных условий задачи. Теперь, очевидно, имеем:

$$\rho(x, t) = \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t)$$

Следуя уравнениям (3) и (10), перепишем отношения:

$$p(x, t) = (a^2 + im_3) \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t)$$

$$w(x, t) = \frac{(1 - v_1 v_2) R^2}{hE_1} (a^2 + im_3) \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t)$$

$$u(x, t) = \frac{\delta(a^2 + im_3)}{\delta} \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t).$$

Для очень длинных трубок ( $\rho_0 \rightarrow \infty$ ), неизвестные параметры принимают следующую предельную форму

$$\rho(x, t) = \alpha \exp[i(\omega t - \delta x)],$$

$$\begin{aligned}
 p(x,t) &= \alpha(a^2 + im_3) \exp[(i(\omega t - \delta x))], \\
 u(x,t) &= -\alpha \delta / \rho_0 \alpha(a^2 + im_3) \exp[(i(\omega t - \delta x))], \\
 w(x,t) &= \alpha((1 - v_1 v_2) R^2) / (hE_1)(a^2 + im_3) \exp[(i(\omega t - \delta x))].
 \end{aligned}$$

Отсюда, в соответствии с формулой Эйлера, для амплитуд иско-  
мых функций можно записать

$$\begin{aligned}
 |\rho| &= \frac{p^v e^{-\delta_1 x}}{\sqrt{a^4 + m_2^2}}, \\
 |p| &= p^v e^{-\delta_1 x},
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 |u| &= \frac{p^v e^{-\delta_1 x}}{\rho_0 \omega} \sqrt{\delta_0^2 + \delta_1^2}, \\
 |w| &= p^v e^{-\delta_1 x} \frac{(1 + v_1 v_2) R^2}{hE_2}.
 \end{aligned}$$

Формулы, которые мы получили здесь, можно использовать в ка-  
честве базы для расчета искомым функций скорости волны  $c = \frac{\omega}{\delta_0}$  и затуха-  
ния  $\delta_1$  в зависимости от  $\alpha_{20}$ .

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Таким образом, исходя из выбранных парамет-  
ров и режима о работе системы, мы можем сделать следующий вывод:

- По мере увеличения значения  $\alpha_{20}$  скорость распространение волны зна-  
чительно уменьшается;
- Амплитуда безразмерная плотность увеличивается с увеличением  $\alpha_{20}$ ;
- Амплитуда скорости смеси увеличивается;
- Вязкость незначительно влияет на характер потока.

В заключение следует отметить, что скорость потока жидкости,  
может быть увеличиваться (уменьшатся) с изменением объемной концен-  
трации пузырьков и, следовательно, функциональность системы может  
быть оптимизирована.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев А.Б. Движение жидкости в оболочке с учетом жесткости внешней среды / А.Б.Алиев // Международный научный журнал «Наука и мир». 2016, № 5(33), с. 14-18.
2. Амензаде Р.Ю. Распространение волн в жидкости, протекающей в упругой трубке с учетом вязко-упругого трения окружающей среды. // Вестник Бакинского Универси-  
тета, 2013, с. 88-94.
3. Педли Т. Гидродинамика крупных сосудов / М.: Мир, 1983, 400 с.
4. Akbarly R.S., Salmanova G.M. Pulsational motion of a mixture in a vibrating medium with consider flow rate. International journal on technical and physical problems of engineering (IJTPE). Issue 31 Volume 9 Number 2 June 2017

# QABARCIQLI ÖZLÜ MAYENİN ÖZLÜ-ELASTİKİ BORUDA DALĞALIVARI HƏRƏKƏTİ

E.T.KİYASBƏYLİ, R.S.ƏKBƏRLİ

## XÜLASƏ

Bu məqalədə düzoxlu elastik boruda sıxılan mayenin ikifazlı qabarcıqlı özlü mayenin pulsvari axını araşdırılır. İşdə birölçülü xətti tənliklərdən istifadə olunmuşdur. Fərz edilir ki, boru ətraf mühitə sərt bərkidilmişdir. Sonlu uzunluq halında təzyiq borunun uclarına tətbiq olunur. Məhdud prosesdə çox uzun boru üçün münasibətlər əldə edilmişdir. Müəyyən mənada bu cür yanaşma belə tip işləri ümumiləşdirir və gücləndirir. Ədədi eksperimentdə tərkibində az miqdarda hava qabarcığı olan suyun yarım sonsuz boruda hərəkətinə baxılmışdır. Dalğanın xüsusiyyətlərinə qabarcıqların həcmnin miqdarının təsiri müəyyən edilmişdir. Qoyulmuş məsələ kompleks dəyişənlər funksiyaları nəzəriyyəsinə tətbiq etməklə həll olunur.

**Açar sözlər:** ikifazlı maye, özlülük, döyünən axın, dalğalar

## WAVE MOTION OF A VISCOUS BUBBLE LIQUID IN A VISCOELASTIC PIPE

E.T.KIYASBEYLI, R.S.AKPERLI

## SUMMARY

This article examines the pulsating flow of a compressible two-phase bubble of a viscous fluid contained in an elastic pipe with a straight axis of the orthotropic. In this work, one-dimensional linear equations were used. It is assumed that the tube is rigidly attached to a specific environment. In the case of a finite length, pressure is applied to the ends of its faces. In a limited process, relationships are obtained for a very long tube. Such a description in a sense generalizes and strengthens the work of this type. In a numerical experiment, a semi-infinite tube with flowing water containing a small amount of air bubbles is considered. The influence of the volume fraction of bubbles on the wave characteristics is determined. The problem is solved by applying the theory of functions of complex variables.

**Keywords:** two-phase liquid, viscosity, pulsating flow, wave.

*Поступила в редакцию: 19.04.2019 г.*

*Подписано к печати: 28.12.2019 г.*

УДК 517.98

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ  
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПО СВОИМ НУЛЯМ

Ч.Г.ТАРИВЕРДИЕВА

*Бакинский Государственный Университет*  
*ibadzadecinare@gmail.com*

*В статье рассматривается краевая задача, порожденная уравнением Штурма-Лиувилля и неразделенными граничными условиями, одно из которых линейно зависит от спектрального параметра. Получено представление характеристической функции этой краевой задачи в виде бесконечного произведения с помощью собственных значений.*

**Ключевые слова:** уравнение Штурма-Лиувилля, характеристическая функция, собственные значения.

Рассмотрим краевую задачу, порожденную на отрезке  $[0, \pi]$  уравнением Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \quad (1)$$

и неразделенными граничными условиями вида

$$\begin{aligned} y'(0) + (\alpha\lambda + \beta)y(0) + \omega y(\pi) &= 0, \\ y'(\pi) + \gamma y(\pi) - \omega y(0) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $q(x)$  – вещественная функция, принадлежащая пространству  $L_2[0, \pi]$ ,  $\lambda$  – спектральный параметр,  $\alpha, \omega, \beta, \gamma$  – вещественные числа, причем  $\alpha\omega \neq 0$ . Эту задачу будем обозначать через  $P$ .

Обозначим через  $W_2^n[0, \pi]$  пространство С.Л. Соболева, состоящее из заданных на отрезке  $[0, \pi]$  комплекснозначных функций, которые имеют  $n-1$  абсолютно непрерывных производных и производную  $n$ -го порядка, суммируемую с квадратом на  $[0, \pi]$ . Если для всех функций  $y(x) \in W_2^2[0, \pi]$ ,  $y(x) \neq 0$ , удовлетворяющих условиям (2), выполняется неравенство

$$\gamma|y(\pi)|^2 - 2\omega \operatorname{Re}[y(0)\overline{y(\pi)}] - \beta|y(0)|^2 + \int_0^\pi \{|y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2\} dx > 0,$$

то будем говорить, что выполняется условие (A) (это условие заведомо выполняется, если  $\beta \leq 0, \gamma \geq 0, |\omega| \leq \sqrt{|\beta|\gamma}, q(x) > 0$ ).

Обозначим через  $c(x, \lambda), s(x, \lambda)$  фундаментальную систему решений уравнения (1), определяемую начальными условиями

$$c(0, \lambda) = s'(0, \lambda) = 1, \quad c'(0, \lambda) = s(0, \lambda) = 0.$$

Легко убедиться, что характеристической функцией краевой задачи  $P$  будет

$$\delta(\lambda) = 2\omega - \eta(\lambda) + \omega^2 s(\pi, \lambda) + (\alpha\lambda + \beta)\sigma(\lambda), \quad (3)$$

где

$$\eta(\lambda) = c'(\pi, \lambda) + \gamma c(\pi, \lambda), \quad \sigma(\lambda) = s'(\pi, \lambda) + \gamma s(\pi, \lambda).$$

Нули функции  $\delta(\lambda)$  являются собственными значениями задачи  $P$  (отметим, что в отличие от случая  $\alpha = 0$  эти собственные значения перемещаясь, распространяются в обе стороны до бесконечности). В работе [1] (см. также [2-3]) установлено, что при выполнении условия (A) собственные значения краевой задачи  $P$  вещественны и отличны от нуля. В этой работе также доказано, что для собственных значений  $\gamma_k$  ( $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) задачи  $P$  при  $|k| \rightarrow \infty$  имеет место следующая асимптотическая формула

$$\gamma_k = k + a + \frac{(-1)^{k+1} b\omega - B}{k\pi} + \frac{\tau_k}{k}, \quad (4)$$

где

$$a = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha, \quad B = \frac{\beta}{1 + \alpha^2} - \gamma - A,$$

$$b = \frac{2}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad A = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx, \quad \{\tau_k\} \in l_2.$$

Настоящая работа посвящена представлению характеристической функции (3) краевой задачи  $P$  в виде бесконечного произведения с помощью собственных значений. Такое представление играет важную роль при решении обратных задач спектрального анализа для дифференциальных операторов.

**Теорема.** Задание спектра  $\{\gamma_k\}$  ( $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) однозначно определяет характеристическую функцию  $\delta(\lambda)$  краевой задачи  $P$  по формуле

$$\delta(\lambda) = \pi \sqrt{1 + \alpha^2} (\gamma_{-0} - \lambda)(\gamma_{+0} - \lambda) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\gamma_k - \lambda}{k}, \quad (5)$$

где  $\alpha = -\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \gamma_k \pi$ .

**Доказательство.** Известно [4, с. 38], что для функций  $c(\pi, \lambda)$ ,  $c'(\pi, \lambda)$ ,  $s(\pi, \lambda)$  и  $s'(\pi, \lambda)$  справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} c(\pi, \lambda) &= \cos \lambda \pi + A \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda} + \frac{f_1(\lambda)}{\lambda}, \\ c'(\pi, \lambda) &= -\lambda \sin \lambda \pi + A \cos \lambda \pi + f_2(\lambda), \\ s(\pi, \lambda) &= \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda} - A \frac{\cos \lambda \pi}{\lambda^2} + \frac{f_3(\lambda)}{\lambda^2}, \\ s'(\pi, \lambda) &= \cos \lambda \pi + A \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda} + \frac{f_4(\lambda)}{\lambda}, \end{aligned}$$

где  $f_m(\lambda)$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) – целая функция экспоненциального типа не выше  $\pi$ , суммируемая с квадратом на вещественной оси. Учитывая эти представления и используя теорему Пели-Винера [5, с. 47], из (3) получаем, что характеристическая функция краевой задачи  $P$  имеет вид

$$\delta(\lambda) = 2\omega + \lambda(\sin \lambda \pi + \alpha \cos \lambda \pi) + (\gamma + A)\alpha \sin \lambda \pi + (\beta - \gamma - A)\cos \lambda \pi + f(\lambda), \quad (6)$$

где  $f(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) e^{i\lambda t} dt$ ,  $\tilde{f}(t) \in L_2[-\pi, \pi]$ .

Поскольку функция  $\delta(\lambda)$  является целой функцией класса  $C$ , то по известному факту (см. [5, с. 94]) она однозначно определяется своими нулями с точностью до некоторого постоянного множителя  $M$ :

$$\delta(\lambda) = M(\gamma_{-0} - \lambda)(\gamma_{+0} - \lambda) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma_k}\right) = M(\gamma_{-0} - \lambda)(\gamma_{+0} - \lambda) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma_k}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma_{-k}}\right). \quad (7)$$

Из (4) получаем, что

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} (\gamma_k - k), \quad \alpha = -\operatorname{tg} a \pi.$$

Обозначим

$$\delta_0(\lambda) = \lambda(\sin \lambda \pi + \alpha \cos \lambda \pi). \quad (8)$$

Ясно, что

$$\delta_0(\lambda) = \sqrt{1 + \alpha^2} \lambda \sin(\lambda - a)\pi. \quad (9)$$

Используя известную формулу

$$\sin \lambda \pi = \lambda \pi \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)$$

(см., например, [5, с. 22]), из (9) получаем



$$\delta_0(\lambda) = \pi\sqrt{1+\alpha^2} \lambda(\lambda-a) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda-a}{k}\right). \quad (10)$$

Принимая во внимание соотношения (7) и (10), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\lambda)}{\delta_0(\lambda)} &= \frac{M(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma_k}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma_{-k}}\right)}{\pi\sqrt{1+\alpha^2} \lambda(\lambda-a) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda-a}{k}\right)} = \\ &= \frac{M}{\pi\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda)}{\lambda(\lambda-a)} \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma_k}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\gamma_{-k}}\right)}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda-a}{k}\right) \left(1 + \frac{\lambda-a}{k}\right)} = \\ &= \frac{M}{\pi\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda)}{\lambda(\lambda-a)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{-k^2}{\gamma_k \gamma_{-k}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(\gamma_k - \lambda)(\gamma_{-k} - \lambda)}{(k - \lambda + a)(-k - \lambda + a)} = \\ &= \frac{M}{\pi\sqrt{1+\alpha^2}} \frac{(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda)}{\lambda(\lambda-a)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{-k^2}{\gamma_k \gamma_{-k}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\gamma_{-k} + k - a}{-k - \lambda + a}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\gamma_k - k - a}{k - \lambda + a}\right). \quad (11) \end{aligned}$$

Легко заметить, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{(\gamma_{-0}-\lambda)(\gamma_{+0}-\lambda)}{\lambda(\lambda-a)} = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\gamma_{-k} + k - a}{-k - \lambda + a}\right) = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\gamma_k - k - a}{k - \lambda + a}\right) = 1.$$

С другой стороны, из (6) и (8) следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\delta(\lambda)}{\delta_0(\lambda)} = 1.$$

Тогда переходя к пределу в равенстве (11) при  $\lambda \rightarrow \infty$ , имеем

$$1 = \frac{M}{\pi\sqrt{1+\alpha^2}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{-k^2}{\gamma_k \gamma_{-k}}.$$

Отсюда находим

$$M = \pi\sqrt{1+\alpha^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k \gamma_{-k}}{-k^2}.$$

Подставляя это значение в (7), получим (5). Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Ибадзаде Ч.Г., Набиев И.М. Свойства спектра оператора Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии / Akademik M.L. Rəsulovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş «Nəzəri və tətbiqi riyaziyyatın aktual məsələləri» elmi konfransının materialları (28-29 oktyabr 2016), s. 162-165.

2. Ibadzadeh Ch. G., Nabiev I. M. An inverse problem for Sturm–Liouville operators with nonseparated boundary conditions containing the spectral parameter // J. Inverse Ill-Posed Probl., 2016, v. 24, № 4, p. 407-411.
3. Ибадзаде Ч.Г., Набиев И.М. Восстановление оператора Штурма-Лиувилля с неразделенными граничными условиями и со спектральным параметром в граничном условии // Укр. мат. журн. 2017, № 9, с. 1217-1223.
4. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977, 332 с.
5. Левин Б.Я. Целые функции. М.: МГУ, 1971, 124 с.

## SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN XARAKTERİSTİK FUNKSIYASININ SIFIRLARINA GÖRƏ BƏRPASI

Ç.Q.TARİVERDİYEVA

### XÜLASƏ

Məqalədə ayrılmayan sərhəd şərtlərindən biri spektral parametrdən xətti asılı olan Şturm-Liuvill məsələsinə baxılır. Bu sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri vasitəsilə xarakteristik funksiyanın sonsuz hasil şəklində göstərilişi alınır.

**Açar sözlər:** Şturm-Liuvil tənliyi, xarakteristik funksiya, məxsusi ədədlər.

## RECONSTRUCTION OF THE CHARACTERISTIC FUNCTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM AT ITS ZERO

Ch.G.TARİVERDİYEVA

### SUMMARY

In this paper a boundary value problem is considered generated by the Sturm-Liouville equation and non-separated boundary conditions, one of which linearly depends on the spectral parameter. The representation of the characteristic function of this boundary value problem is obtained in the form of an infinite product using eigenvalues.

**Key words:** Sturm-Liouville equation, characteristic function, eigenvalues.

*Поступила в редакцию: 10.09.2019 г.*

*Подписано к печати: 28.12.2019 г.*

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ В СМЫСЛЕ  
ТИХОНОВА-ЛАВРЕНТЬЕВА  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ-РИМАНА НА КВАДРАТЕ

Н.А.АЛИЕВ, Л.Ф.ФАТУЛЛАЕВА  
Бакинский Государственный Университет  
laura\_fat@rambler.ru

*Излагаемая работа посвящена исследованию решения обратной задачи в смысле Тихонова-Лаврентьева для уравнения эллиптического типа первого порядка на квадрате. Для определения решения поставленной граничной задачи получено соотношение.*

**Ключевые слова:** обратная задача в смысле Тихонова-Лаврентьева, уравнение Коши-Римана, условие Карлемана, сингулярное слагаемое, регулярное выражение.

### Введение

В работе [1] исследуется граничная задача для уравнения эллиптического типа первого порядка, т.е. для уравнения Коши-Римана. Работа [2] посвящена построению аналитической функции, которая является решением граничной задачи, поставленной для двумерного эллиптического уравнения первого порядка в вещественной плоской области. В работе [3] рассматривается обратная задача, которая содержит уравнение Коши-Римана с двумя нелокальными граничными условиями. Помимо искомой функции, правая часть второго граничного условия неизвестна. Чтобы решить эту проблему, сначала получают необходимые условия для фундаментального решения уравнения Коши-Римана, а затем приводятся достаточные условия для сведения этой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. В работе [4] исследуется граничная задача для уравнения эллиптического типа первого порядка внутри острого угла плоскости. В статье [5] расширяется задача, которая состоит из смешанных уравнений в частных производных в области  $D$  с нелокальными граничными условиями. Используя теорию обобщенных решений, получают необходимые и достаточные условия для приведенной формы этой задачи в интегральные уравнения Фредгольма со слабыми особенностями.

### Постановка задачи

Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \quad x_k \in (0,1), \quad k = 1,2, \quad (1)$$

$$\alpha_{k1}(t)u(t,0) + \alpha_{k2}(t)u(1,1-t) + \alpha_{k3}(t)u(1-t,1) + \alpha_{k4}(t)u(0,t) = \varphi_k(x), \quad t \in [0,1], \quad k = \overline{1,4}, \quad (2)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha_{kj}(x)$  и  $\varphi_k(t)$  при  $k = \overline{1,4}$ ;  $j = \overline{1,4}$ ;  $t \in [0,1]$  непрерывные функции,  $u(x)$  - аналитическая функция. Граничные условия (2) линейно независимы. Неизвестные являются следующие три функции  $u(x)$ ,  $\alpha_{11}(t) = \alpha_{22}(t) = \alpha_{33}(t) = \alpha_{44}(t) = \alpha(t)$  и  $\varphi_2(t) = \varphi_4(t) = \varphi(t)$ , а остальные данные граничного условия (2) считаются заданными непрерывными функциями.

Как видно из условия (2), четыре точки, которые одновременно двигаются вдоль границами квадрата, соблюдают условия Карлемана, т.е. задача хорошо поставлена.

### Получение основного соотношения для решения задачи

Учитывая, что

$$U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} \quad (3)$$

является фундаментальное решение уравнения Коши-Римана (1) [6], легко получаем основное соотношение, т.е.

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} U(x - \xi) dx_2 + i \int_0^1 dx_2 \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} U(x - \xi) dx_1 = 0$$

или

$$\int_0^1 u(x) U(x - \xi) \Big|_{x_2=0}^1 dx_1 + i \int_0^1 u(x) U(x - \xi) \Big|_{x_1=0}^1 dx_2 = \begin{cases} u(\xi), & \xi_k \in (0,1), \quad k = 1,2 \\ \frac{1}{2} u(\xi), & \xi_1 \in [0,1], \quad \xi_2 = 0 \quad \text{или} \quad \xi_2 = 1 \quad \text{и} \\ \xi_2 \in [0,1], \quad \xi_1 = 0 \quad \text{или} \quad \xi_1 = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Отделяя необходимые условия из (4), имеем:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{1}{2}u(\xi_1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(x_1, 1)}{1+i(x_1-\xi_1)} dx_1 + \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(x_1, 0)}{x_1-\xi_1} dx_1 + \\
& + \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(1, x_2)}{x_2+i(1-\xi_1)} dx_2 - \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(0, x_2)}{x_2-i\xi_1} dx_2, \\
& \frac{1}{2}u(\xi_1, 1) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(x_1, 1)}{x_1-\xi_1} dx_1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(x_1, 0)}{-1+i(x_1-\xi_1)} dx_1 + \\
& + \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(1, x_2)}{x_2-1+i(1-\xi_1)} dx_2 - \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(0, x_2)}{x_2-1-i\xi_1} dx_2, \\
& \frac{1}{2}u(0, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(x_1, 1)}{1-\xi_2+ix_1} dx_1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(x_1, 0)}{-\xi_2+ix_1} dx_1 + \\
& + \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(1, x_2)}{x_2-\xi_2+i} dx_2 - \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(0, x_2)}{x_2-\xi_2} dx_2, \\
& \frac{1}{2}u(1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(x_1, 1)}{1-\xi_2+i(x_1-1)} dx_1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(x_1, 0)}{-\xi_2+i(x_1-1)} dx_1 + \\
& + \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(1, x_2)}{x_2-\xi_2} dx_2 - \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{u(0, x_2)}{x_2-\xi_2-i} dx_2.
\end{aligned} \right. \quad (5)$$

Каждое из соотношений содержит один сингулярное слагаемое.

Оставляя только сингулярные слагаемые, необходимые условия (5) напомним в виде:

$$\left\{ \begin{aligned}
& u(t, 0) = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(\tau, 0)}{\tau-t} d\tau + \dots, \quad u(1-t, 1) = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1-\tau, 1)}{\tau-t} d\tau + \dots, \\
& u(0, t) = -\frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{\tau-t} d\tau + \dots, \quad u(1, 1-t) = -\frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1, 1-\tau)}{\tau-t} d\tau + \dots,
\end{aligned} \right. \quad (6)$$

где многоточием обозначены суммы несингулярных слагаемых.

Теперь, исходя из (6) и учитывая граничные условия (2), создадим следующую линейную комбинацию:

$$\begin{aligned}
& \alpha_{k1}(t)u(t, 0) - \alpha_{k2}(t)u(1, 1-t) + \alpha_{k3}(t)u(1-t, 1) - \alpha_{k4}(t)u(0, t) = \\
& = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau-t} \{[(\alpha_{k1}(t) - \alpha_{k1}(\tau)) + \alpha_{k1}(\tau)]u(\tau, 0) + [(\alpha_{k2}(t) - \alpha_{k2}(\tau)) + \alpha_{k2}(\tau)]u(1, 1-\tau) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [(\alpha_{k3}(t) - \alpha_{k3}(\tau)) + \alpha_{k3}(\tau)]u(1-\tau, 1) + [(\alpha_{k4}(t) - \alpha_{k4}(\tau)) + \alpha_{k4}(\tau)]u(0, \tau) + \dots = \\
& = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau-t} [\alpha_{k1}(\tau)u(\tau, 0) + \alpha_{k2}(\tau)u(1, 1-\tau) + \alpha_{k3}(\tau)u(1-\tau, 1) + \alpha_{k4}(\tau)u(0, \tau)] + \dots = \\
& = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_k(\tau)}{\tau-t} d\tau + \dots, \quad k = \overline{1, 4}. \tag{7}
\end{aligned}$$

Легко видно, что при получении (7) было учтено граничное условие (2). Учитывая, что правая часть (7) не содержит неизвестную функцию, то оно существует в смысле Коши.

Если имеет место условие

$$\varphi_k(t) \in C^{(1)}[0, 1], \quad \varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0, \quad k = \overline{1, 4}, \tag{8}$$

то интеграл в правой части (7) существует в обычном смысле. Поэтому мы получаем четыре регулярных соотношений (7), если

$$\alpha_{kj}(t) \in H^{(\mu)}(0, 1), \quad \mu \in (0, 1), \quad k = \overline{1, 4}; \quad j = \overline{1, 4}, \tag{9}$$

где  $H^{(\mu)}(0, 1)$  - класс Гельдера и справедливо условие (8).

Возвращаясь к граничному условию (2), предполагая, что

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) & \alpha_{14}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) & \alpha_{24}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) & \alpha_{34}(t) \\ \alpha_{41}(t) & \alpha_{42}(t) & \alpha_{43}(t) & \alpha_{44}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{10}$$

по правилу Крамера определяем

$$u(t, 0), \quad u(1, 1-t), \quad u(1-t, 1) \quad \text{и} \quad u(0, t) \tag{11}$$

однозначно через  $\varphi_k(t)$ ,  $k = \overline{1, 4}$ . Учитывая, что  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_3(t)$  заданные непрерывные функции из регулярного выражения (7), выберем  $k = 1$  и  $k = 3$ .

Подставляя определенные функции (11) в двум выражении, которые выбраны из (7), получаем два регулярные выражения. Из этих выражений определяются неизвестные функции  $\alpha(t)$  и  $\varphi(t)$ . Что касается решению поставленной граничной задачи (1)-(2)  $u(x)$ , то оно определяется из основного соотношения (4), если в левую часть подставит найденные функции (11) и определенные функции  $\alpha(t)$  и  $\varphi(t)$ .

### Заключение

**Теорема.** Пусть данные задачи(1)-(2) являются непрерывными функциями, условие (2) линейно независимо и выполняются условия (8)-(10). Тогда обратная задача в смысле Тихонова-Лаврентьева (1)-(2) имеет решение, которое определяется из основного соотношения (4), а неизвестные функции  $\alpha(t)$  и  $\varphi(t)$  определяются из регулярных выражений (7) при  $k = 1$  и  $k = 3$ , которые получаются из необходимых условий (5).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Н.А., Гулиева А.М. Построение сопряженной задачи для уравнения Коши-Римана. Вестник Бакинского Университета. Серия физико-математических наук, Азербайджан, Баку, № 4, 2013, с. 43-54.
2. Алиев Н.А., Масталиев В.Ю., Зейналов Р.М. О краевой задаче для уравнения Коши-Римана. Научные труды фундаментальных наук Азербайджанского технического университета. Азербайджан, Баку, 2013, том. XII (45), № 1, с. 67-71.
3. Sajjadmanesh M., Jahanshahi M., Aliyev N. Tikhonov-Lavrentev type inverse problem including Cauchy-Riemann equation. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, Baku, January 2013, Vol. 3, № 1, pp. 104-110.
4. Алиев Н.А., Багиров Г.А., Велиева З.Т. О фредгольмовости краевой задачи для уравнения Коши-Римана в остром угле. Журнал современной прикладной математики, Азербайджан, Баку, том 1, выпуск 2, декабрь 2011 года, с. 43-48.
5. Aliyev N., Jahanshahi M. Sufficient conditions for reduction of the BVP including a mixed PDE with non-local boundary conditions to Fredholm integral equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Vol. 28 (1997), № 3, pp.419-425.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, 512 с.

## KVADRAT ÜZƏRİNDƏ KOŞI-RİMAN TƏNLİYİ ÜÇÜN TİXONOV-LAVRENTYEV MƏNADA BİR TƏRS MƏSƏLƏ HAQQINDA

N.Ə.ƏLİYEV, L.F.FƏTULLAYEVA

### XÜLASƏ

Təqdim olunan iş kvadrat üzərində birinci tərtib elliptik tip tənlik üçün Tixonov-Lavrentyev mənadında tərs məsələnin həllinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Qoyulmuş sərhəd məsələsinin həllinin təyini üçün ifadə alınmışdır.

**Açar sözlər:** Tixonov-Lavrentyev mənadında tərs məsələ, Koşi-Riman tənliyi, Karleman şərti, sinqulyar toplanan, requlyar ifadə.

## ON ONE INVERSE PROBLEM IN THE MEANING OF TIKHONOV-LAVRENTIEV FOR EQUATION OF KOSHI-ROMAN ON A SQUARE

N.A.ALIYEV, L.F.FATULLAYEVA

### SUMMARY

The present work is devoted to the study of the solution of the inverse problem in the sense of Tikhonov-Lavrentiev for a first-order elliptic type equation on a square. To determine the solution of the posed boundary problem, the relation is obtained.

**Keywords:** inverse problem in the sense of Tikhonov-Lavrentiev, Cauchy-Riemann equation, Carleman condition, singular term, regular expression.

*Postupila v redakciju: 09.10.2019 g.*

*Podpisano k печати: 28.12.2019 g.*

## MEXANİKA

UOT 539.21

İDEAL SIXILMAYAN MAYENİN  
ELASTİKİ BORUDA PULSASIYALI HƏRƏKƏTİ

A.B.ƏLİYEV, K.R.RƏHİMOVA, T.M.MAHMUDZADƏ

*Bakı Dövlət Universiteti*  
*alialiev.b@gmail.com*

*Bu işdə boru və ətraf mühiti ayıran sərhəddə elastiki sürtünmənin ox boyu koordinatlardan asılı olan ideal sıxılmayan mayenin pulsasiyalı axını haqqında məsələyə baxılır. Xüsusi hallarda ölçüsüz sərtlik parametrlərinin dalğa xüsusiyyətlərinə (xarakteristikalarına) təsiri müəyyənləşdirilir.*

**Açar sözlər:** xarici sərtlik, müntəzəm Şturm-Luivill məsələsi, Veyerştras xüsusiyyəti, dalğa sürəti, sönmə.

Deformasiya olunan borularda axıdılan mayedə dalğaların yayılması məsələsi bir çox cəhətdən maraqlıdır. Nəzəri cəhətdən bu riyazi-fizikanın məsələsi, tətbiqi cəhətdən isə dinamik təsirə məruz qalan bir sistemin hesablamalı olduğu məsələdir. Bu günə qədər L.Eyler, İ.Qromeki, N.Jukovskinin əsas əsərlərində tədqiq olunmuş belə məsələlər hidroelastikliyin geniş yayılmış sahəsini təşkil edir. [1],[2],[3],[4]. Lakin ətraf mühitin sərtliyini nəzərə alaraq bir sıra xüsusiyyətlər kifayət qədər öyrənilməmişdir. Bu baxımdan hazırkı iş xarici sərtlik ox boyu koordinatların funksiyası olduqda sabit dairəvi kəsikli elastiki boruda axan ideal mayedə kiçik amplitudlu dalğaların yayılmasının birölçülü məsələsinin formalaşdırılması və riyazi əsaslandırılmasına həsr olunmuşdur. Məsələ Şturm-Luivill müntəzəm sərhəd məsələsinin həllinə gətirilir. Xüsusi halda, sərtlik sabit olduqda dalğa sürəti və sönmənin müəyyən edilməsi üçün formullar əldə edilir.

1. Mexanikanın bir çox məsələlərində deformasiyalanan sistemin xüsusiyyətlərini əhatə olunduğu mühitlə-maye ilə qarşılıqlı təsirdə öyrənmək lazım gəlir. Bu məsələdə sistemin xarakteristik xüsusiyyətlərini nəzərə alaraq, özlü maye və boru kimi sadə modeli təhlil etmək lazımdır. Buna görə də burada radiusu  $R$ , uzunluğu  $l$  və qalınlığı  $h$  olan nazik divarlı elastiki boruda ideal sı-



xılmayan mayenin axınıni təsvir edən tənliklər quraq. Hərəkətin hidrodinamik və kəsilməzlik tənliyi aşağıdakı kimi olacaq: [1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

Burada  $p(x,t)$ -hidrodinamik təzyiq,  $u(x,t)$ -maye axınının ox boyu sürəti,  $\rho$  - sıxlıq,  $w(x,t)$ -divarın radial yerdəyişməsi,  $x \in [0,l]$ -ox boyu koordinatdır. Bu yanaşmada  $R \ll l$  bərabərsizliyi nəzərə alınır. Divarın ətalətinə baxmayaraq, yaza bilərik: [4]

$$\sigma = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R^2} w$$

Burada  $E$  -elastiklik modulu,  $\nu$ -Puasson əmsalıdır. Daha sonra nəzərə alırıq ki,  $\sigma$  kəmiyyəti 2 növ gərginlikdən ibarətdir:  $p$  – hidrodinamik və  $-G \frac{\partial w}{\partial t}$  - xarici mühit sərtliyinin yaratdığı gərginlik;

$$\sigma = p - G \frac{\partial w}{\partial t}$$

Əgər burada  $G = G(x) = G_0 g(x) \frac{\partial w}{\partial t}$  qəbul etsək, onda alırıq:

$$p = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} w + G_0 g(x) \frac{\partial w}{\partial t}\quad (2)$$

Beləliklə, qapalı hidroelastiki tənliklər sistemi (1) və (2) ilə təsvir olunur. Sonrakı mülahizələrdə tənliklərdəki funksiyaların hamarlıq şərtlərini ödədiklərini qəbul edəcəyik. Əgər (1) və (2) tənliklərini birləşdirsək və

$$c_0^2 = \frac{E}{2\rho}, \quad \eta = \frac{h}{R} (1-\nu^2)^{-1}$$

işarələməsini daxil etsək,  $w$  ilə bağlı alırıq:

$$c_0^2 \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{RG_0}{2\rho} g''(x) \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{RG_0}{\rho} g'(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{RG_0}{2\rho} g(x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\quad (3)$$

Burada  $g(x) = 1$  qiyməti bircins xarici sərtlik halına uyğundur.

**2.** Dəyişənlərinə ayırma üsulunu tətbiq edərək (3) tənliyini adi diferensial tənlik kimi həll edirik.  $w$  funksiyasının zamanla artan  $\exp(i\omega t)$  ilə mütənasib olduğunu fərz etsək, yaza bilərik:

$$w = w_1(x) \exp(i\omega t)\quad (4)$$

Burada  $\omega$  – bucaq tezliyinin həqiqi qiyməti,  $w_1$  – istənilən funksiyadır. (4)-ü (3)-də yerinə yazsaq, aşağıdakı tənliyi alırıq:

$$w_1'' + \mu_1(x)w_1' + \mu_2(x)w_1 = 0 \quad (5)$$

Burada

$$\mu_1(x) = \frac{2ig_0g'(x)}{\eta + ig_0g(x)}$$

$$\mu_2(x) = \frac{\omega^2/c_0^2 + ig_0g''(x)}{\eta + ig_0g(x)},$$

$g_0 = \omega R \frac{G_0}{E}$  – ölçüsüz sərtlik parametridir. Ştrixlər isə  $x$ -ə nəzərən diferensiallamayı göstərir. Luivill əvəzləməsindən istifadə edərək, [5]

$$y = w_1 \exp \frac{1}{2} \int \mu_1(x) dx = \lambda(x)w_1 \quad (6)$$

dalğa tənliyini aşağıdakı formada alırıq:

$$y'' + I(x)y = 0 \quad (7)$$

Burada  $I(x)$  – invariant olub

$$I(x) = \mu_2(x) - \frac{1}{4}\mu_1^2(x) - \frac{1}{2}\mu_1'(x) \quad (8)$$

kimi təyin edilir. (7) tənliyini

$$q(x) = 1 - \frac{I(x)}{\delta^2}$$

əvəzləməsinin köməyi ilə çevirsək, qoyulmuş məsələnin tənliyini aşağıdakı kimi alırıq:

$$y'' + \delta^2 y = \delta^2 q(x)y \quad (9)$$

$q(x)$  potensialı üçün inteqrallama şərtini yazaq:

$$\int_0^l |q(x) dx| < +\infty \quad (10)$$

$g(x)=1$  olduqda (9) tənliyində  $I(x)$  – in qiyməti  $\delta^2$  ilə ifadə olunur. Buna görə də (8)-ə uyğun olaraq

$$\delta^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} (\eta + ig_0)^{-1}$$

Burada ifadəni kvadrat kökdən azad etsək,  $\delta = \delta_0 - i\delta_1$  alırıq. Bu ifadədə

$$\delta_0 = \frac{\omega/c_0\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta^2 + g_0^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + g_0^2/\eta^2} + 1}{2}}$$

$$\delta_1 = \frac{\omega/c_0\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta^2 + g_0^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + g_0^2/\eta^2} - 1}{2}} \quad (11)$$

(9) tənliyinə  $x = 0$  və  $x = l$  olduqda sərhəd şərtləri də əlavə olunmalıdır.

Beləliklə, məsələnin həlli müntəzəm Şturm-Luivill sərhəd məsələsinin həllinə gətirildi.

3. Baxılan (9) tənliyi sağ tərəfi qeyri-bircins tənlik olduğundan sabitlərin varyasiyası metodunu tətbiq edərək onu inteqral tənliyin həllinə gətiririk:

$$y = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \delta \int_x^l \sin \delta(\xi - x) q(\xi) y(\xi) d\xi \quad (12)$$

Burada  $\alpha_1, \alpha_2$  – müvafiq sərhəd şərtləri əsasında müəyyən olunacaq inteqral sabitləridir. (12) tənliyi Volterin inteqral tənliyi olub, ardıcıl yaxınlaşma metodu ilə həll edilir. Əgər

$$y_0 = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x}$$

işarələməsini qəbul etsək, onda  $n \geq 1$  üçün alarıq:

$$y_n = y_0 + \delta \int_x^l \sin \delta(\xi - x) q(\xi) y_{n-1}(\xi) d\xi$$

(10) bərabərsizliyinə əsasən Veyerştras xüsusiyyətini nəzərə alaraq [6], [7] (12) ilə ifadə edilən inteqral tənliyin yeganə həlli aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$y(x, \delta) = y_0(x, \delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{y_n(x, \delta) - y_{n-1}(x, \delta)\}$$

Əgər

$$y_n(x, \delta) - y_{n-1}(x, \delta) = \delta^n f_n(x, \delta)$$

işarələməsini qəbul etsək, həmin tənliyi başqa formada aşağıdakı kimi yazıb bəzək:

$$y(x, \delta) = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x, \delta) \quad (13)$$

(13) formulunda aşağıdakı rekürrent əlaqələr var:

$$\begin{aligned} f_1(x, \delta) &= \int_x^l \sin \delta(\xi - x) q(\xi) y_0(\xi) d\xi, \dots, \\ f_n(x, \delta) &= \int_x^l \sin \delta(\xi - x) q(\xi) y_{n-1}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (14)$$

Beləliklə, yuxarıda göstərilən məlumatlara əsasən (9) tənliklərinin həlli  $\alpha_1$  və  $\alpha_2$ -nin istənilən qiymətlərində (12) tənliyini ödəyir. (13) sırası hissə-hissə diferensiallamaqla müntəzəm yığılar və (4) ilə əlaqədar olaraq (13) ifadəsinin əvəzinə aşağıdakı kimi göstərilə bilər:

$$w(x, t) = \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x, \delta) \right\} \exp(i\omega t) \quad (15)$$

Bu ifadəni (2) bərabərliyində yerinə yazsaq, alarıq:

$$p(x,t) = \frac{E}{R} \{ \eta + i g_0 g(x) \} \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x, \delta) \right\} \exp(i\omega t) \quad (16)$$

$\alpha_1$  və  $\alpha_2$  ilə əlaqədar olan təzyiqin, maye sürətinin və yerdəyişmənin sonrakı təsviri üçün  $x=0$  və  $x=l$  olduqda müxtəlif sərhəd şərtləri qəbul edilə bilər. Eyni bir vəziyyət borunun ucunda pulsasiya təzyiqinin təyin olunduğu vəziyyətdə də mövcuddur.

$$p(0,t) = p_0 \exp(i\omega t), \quad p(l,t) = p_l \exp(i\omega t) \quad (17)$$

Burada  $p_0, p_l$  – empirik sabitlərdir. İndi isə biz  $\alpha_1$  və  $\alpha_2$  -nin təyin olunmasına keçək. Bunun üçün (16) və (17) ifadələrinin birbaşa müqayisəsindən aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= a \\ \alpha_1 e^{i\delta l} + \alpha_2 e^{-i\delta l} &= b \end{aligned}$$

Bu qiymətlərdən istifadə edərək alırıq:

$$\begin{aligned} a &= \frac{R\lambda(0)}{E(\eta + i g_0 g(0))} p_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(0) \\ b &= \frac{R\lambda(l)}{E(\eta + i g_0 g(l))} p_l - \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(l) \end{aligned} \quad (18)$$

İndi  $\alpha_1$  və  $\alpha_2$  – nin qiymətlərini təyin etdikdən sonra və Eylər formulundan istifadə edərək (15) və (16)-da mürəkkəb hesablamalar aparsaq alırıq:

$$p(x,t) = \frac{E}{R} \{ \eta + i g_0 g(x) \} \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \frac{a \sin \delta(l-x) + b \sin \delta x}{\sin \delta l} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x, \delta) \right\} \exp(i\omega t) \quad (19)$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \frac{a \sin \delta(l-x) + b \sin \delta x}{\sin \delta l} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x, \delta) \right\} \exp(i\omega t) \quad (20)$$

Sürəti təyin etmək üçün növbəti mülahizələrə keçək. Yuxarıdakı kimi dəyişənlərinə ayırma üsulundan istifadə edərək alırıq:

$$u(x,t) = U(x) \exp(i\omega t)$$

Həmçinin  $\Phi(x)$  funksiyasını daxil etsək,

$$\Phi(x) = \{ \eta + i g_0 g(x) \} \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ \frac{a \sin \delta(l-x) + b \sin \delta x}{\sin \delta l} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n f_n(x, \delta) \right\}$$

onda (1) tənliklər sisteminin birinci tənliyindən asanlıqla sürətin paylanması aşağıdakı kimi tapmaq olar:

$$u(x,t) = 2i \frac{c_0^2}{\omega R} \Phi'(x) \exp(i\omega t) \quad (21)$$

Alınan (19)-(21) formulları qoyulan məsələnin həlli hesab edilə bilər. Beləliklə, (13) və (14) ifadələri istənilən həllin konstruktiv şəkildə təqdim edilməsini təmin edir.

4. Ətraf mühitin sərtliyi sabit olduqda (yəni  $g(x)=1$  olduqda) borunun sağ ucunda olan təzyiç sıfır olur. ( $p_l = 0$ ) Həmçinin

$$b = 0, \quad a = \frac{p_0}{E} \frac{R}{\eta + ig_0}, \quad \Phi(x) = \frac{p_0}{E} \frac{\sin \delta(l-x)}{\sin \delta l}$$

olduqda  $\lambda(x)=1$  və  $q(x)=0$  olur. Onda məlum ifadələri aşağıdakı kimi yazma bilərik:

$$p(x,t) = p_0 \frac{\sin \delta(l-x)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t), \quad w(x,t) = \frac{p_0}{E} \frac{R}{\eta - ig_0} \frac{\sin \delta(l-x)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t), \quad (22)$$

$$u(x,t) = -2i \frac{p_0}{E} \delta \frac{c_0^2}{\omega} \frac{\cos \delta(l-x)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t)$$

Mühitin sərtliyinin təsirini nəzərə almadıqda  $c = \omega / \delta_0$  -dalğa sürəti ilə  $\delta_1$  sönmənin (11) asılılıqlarını yenidən aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\frac{c}{c_0} = \sqrt{\eta \left(1 + \frac{g_0^2}{\eta^2}\right)} \left\{ \sqrt{\frac{1 + g_0^2 / \eta^2 + 1}{2}} \right\}^{-1} \quad (23)$$

$$\delta_1 \frac{c_0}{\omega} = \sqrt{\frac{1}{\eta(1 + g_0^2 / \eta^2)}} \sqrt{\frac{1 + g_0^2 / \eta^2 - 1}{2}}$$

Burada  $g_0 / \eta \ll 1$  olduqda

$$\frac{c}{c_0} \approx \sqrt{\eta}, \quad \delta_1 \frac{c_0}{\omega} \approx 0,$$

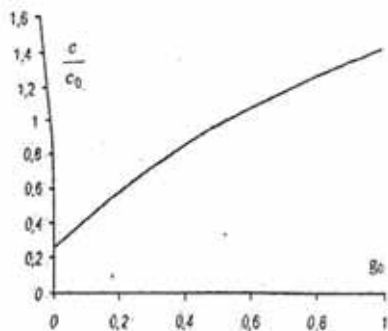
$g_0 / \eta \gg 1$  olduqda isə

$$\frac{c}{c_0} \approx \sqrt{2g_0}, \quad \delta_1 \frac{c_0}{\omega} \sim \frac{1}{\sqrt{2g_0}}$$

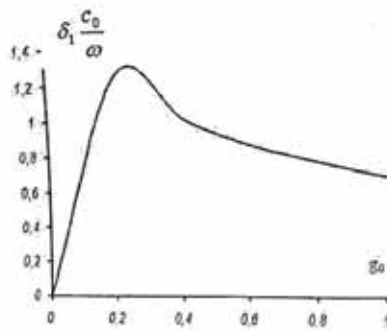
şəklində qəbul edilir. Qeyd edək ki, sonrakı rəqəmsal hesablamaların nəticələri yuxarıda göstərilən ifadələrlə uyğundur.

İndi (23) formuluna əsasən  $\eta \approx 0,67$  qiymətinə uyğun olan  $h/R = 5 \cdot 10^{-2}, \nu = 0,5$

qəbul edərək,  $g_0 \in [0,1]$  olduqda  $\frac{c}{c_0}$  və  $\delta_1 \frac{c_0}{\omega}$  kəmiyyətlərinin  $g_0$  -dan ədədi asılılıqları şəkil 1 və 2-də göstərilmişdir.



Şəк. 1.



Şəк. 2.

Birinci şəkilə əsasən, sərtlik parametrinin artması ilə sistemdə dalğanın yayılma sürəti artır və təyin edilmiş aralıqda  $g_0 \approx 1,37$  qiymətinə yaxınlaşır. İkinci şəkilin məlumatına görə qəbul edilən  $\eta$  üçün sönmə zamanı  $g_0 \approx 0,25$  olduğunu düşünə bilərik.

Beləliklə, bu məqalədə elastiki boru içərisində ideal sıxılmayan mayenin dalğa axını probleminin analitik həlli əldə edilmişdir. Xüsusi halda, birincis vəziyyətdə sərtlik parametrinin sistemin dalğa xüsusiyyətlərinə təsiri təhlil edilir. Göstəriləyi kimi, burada  $g_0$  – dan asılı olaraq sönmə halı mümkündür.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задача упругости. М.: Наука, 1979, 320 с.
2. Гидродинамика кровообращения: сборник переводов / под ред. С.А.Регирера. М.: Мир, 1971, 269 с.
3. Педли Т.Ж. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983, 400 с.
4. Лайтфут Э. Явление переноса в живых системах. М.: Мир, 1977, 520 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971, 576 с.
6. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.
7. Амензаде Р.Ю. Волны в неоднородной трубке с протекающей двухфазной жидкостью // Механика композитных материалов, 2003, т.39, №4, с.555-566.

#### ИМПУЛЬСНОЕ ТЕЧЕНИЕ В УПРУГОЙ ТРУБЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖАТОЙ ЖИДКОСТИ

Ф.Б.АЛИЕВ, К.Р.РАГИМОВА, Т.М.МАХМУДЗАДЕ

#### РЕЗЮМЕ

В этом случае рассматривается вопрос об импульсном течении идеальной несжатой жидкости, зависящей от координаты упругого трения на границе, разделяющей трубу и окружающую среду. В особых случаях определяется влияние параметров нестационарной жесткости на волновые характеристики.

**Ключевые слова:** внешняя жесткость, регулярная проблема Штурма-Луивилла, характеристика Вейерштрассе, скорость волны, затухание.

## PULSE FLOW IN ELASTIC PIPE OF IDEAL NON-SQUEEZED LIQUID

A.B.ALIYEV, K.R.RAHIMOVA, T.M.MAHMUDZADE

### SUMMARY

In this case, the question of the pulse flow of the ideal non-squeezed fluid, which depends on the coordinate of the elastic friction at the boundary separating the pipe and the environment, is considered. In special cases, the effect of the unsteady rigidity parameters on the wave characteristics determined.

**Key words:** external hardness, regular Sturm-Luivill issue, Veyerstrasse feature, wave velocity, switches.

*Redaksiyaya daxil oldu: 23.09.2019-cu il*

*Çapa imzalanıb: 28.12.2019-cu il*

## İNFORMATİKA

UDK 548.544.45

İNFORMATİKA FƏNNİ  
ÜZRƏ MODUL PROQRAMIN TƏRTİBİ

M.Ə.ALIŞOV, N.A.İMANOVA, M.S.XƏLİLOV

*Bakı Dövlət Universiteti*  
*khalilov\_mubariz@mail.ru*

*Verilmiş işdə modul texnologiyalarına əsaslanan təhsildə modul proqramın bölmələri və təşkili öz əksini tapmışdır. İnformatika dərslərində modul proqramın tətbiqini göstərmək üçün Veb proqramlaşdırma sahəsi üzrə “HTML dilinin əsasları” adlı nümunə hazırlanmışdır. Hər bir öyrənmə fəaliyyətinin və modulun sonunda qiymətləndirmə aparılması üçün nümunə məqsədli testlər öz əksini tapmışdır.*

**Açar sözlər:** modul təhsil texnologiyası, modul proqram, öyrənmə fəaliyyətləri, modul qiymətləndirmə.

İnkişaf edən iqtisadiyyat və texnologiyalar iş sahəsində yeni kompetensiyalar tələb edir. Bu kompetensiyaların əldə edilməsində peşə təhsili vacib rol oynayır. Gənclərin peşələri ilə əlaqəli gözləntiləri getdikcə dəyişilməkdədir. Bir çox Avropa ölkələrində şagirdlər akademik və ya ümumi təhsili peşə təhsilindən üstün tuturlar. Bunun da nəticəsində peşəyə yiyələnəndə və iş tapmaqda problemlərlə qarşılaşırlar. Lakin gənclər peşə təhsilinin üstünlüyünü dərk etməlidirlər.

Modul tədris anlayışı ilk dəfə ikinci dünya müharibəsinin sonlarında qısa müddət ərzində sürətlə yüksək ixtisaslı kadrların hazırlanması ilə əlaqədar olaraq yaranmış və bu ideya Berres Fredrik Ckinerin əsərlərində öz əksini tapmış, sonralar D.Rassel, M.Qoldşmit, K.Kurxun və Q.Ouensin əsərlərində inkişaf etdirilmişdir [2].

Müxtəlif tədqiqatçıların modul təhsildə maraqları müxtəlif məqsədlərə nail olmaq arzusudur. Bəziləri (M.Goldschmid, J.Russell) şagirdin rahat bir işlə təmin olunmasını, müəyyən bir şəxs üçün uyğun bir təhsil üsulunu seçməyi tövsiyə edir; ikinci (J.Klingsted, S.Kürç) - şagirdlərə güclü və zəif tərəflərini müəyyənləşdirmək, özlərini hazırlamaq, düzəldici modullardan istifadə etmək imkanı verməyi tövsiyə edir; üçüncü (V.M.Qareev, E.M.Durko, S.İ.Qulikov,



G.Ouens) - müxtəlif metod və tədris formalarını birləşdirir; dördüncü (V.B.Zakoryukin, VI Panchenko və s.) - təhsilin məzmununu yaradılmış təhsil materiallarından birbaşa qurmaq; digərləri (İ.Prokopenko, M.A.Choshanov, P.Yut-syavic) - şagird və tələbələrin peşəkar fəaliyyətə hazır olmalarına yüksək səviyyədə nail olmaq; V.V.Karpov, M.N.Katxanov, M.A.Andenko - fənlərarası ünsiyyət qurmaq və xüsusi ali və orta təhsil müəssisələri arasında qarşılıqlı problemi həll etmək kimi məqsədləri qoyur [4].

1974-cü ildə Parisdə YUNESKO-nun rəhbərliyi altında keçirilən konfransda modul texnologiyasının tətbiqi ilə təhsilin keyfiyyətini artırmaq üçün modul tədrisin tətbiqi tövsiyə olunmuşdur.

Əsas məqsədi gələcəyin keyfiyyətli iş gücünü yetişdirmək olan modul texnologiyalarına əsaslanan təhsilin geniş bazalı, peşə kompetensiyalarına əsaslanan, yenilənən və ya dəyişən ixtisaslara uyğun şəkildə, şagirdlərin davamlı olaraq təhsili üçün təməl qoyması vacibdir. Hazırda peşələrin dəyişilmə ilə üz-üzə olması və daha qarışıq bir strukturda olması səbəbi ilə, peşə kompetensiyalarının da geniş bazalı biliklərə, bacarıq və davranışlara əsaslanma olmasını və proqramların buna görə təkmilləşdirilməsini vacib hala gətirməkdədir. Proqramlar modula əsaslanaraq bütöv şəkildə, peşələr – peşə qruplarına, peşə sahələrinə və peşə qollarına görə təsnif edilməlidir. Modul texnologiyasına əsaslanan təhsil öyrənən fərdlərə öz qavrama sürətlərinə görə irəliləmək imkanı verir. Modul təhsilin əsasında modul proqramlar durur ki, bu da tələbənin fərdi iş planını müəyyən edir [7].

Modulun tərkibi aşağıdakı elementlərdən ibarətdir:

- 1) Mündəricat
- 2) Açıqlamalar (izahatlar)
- 3) Giriş
- 4) Öyrənmə fəaliyyətləri
- 5) Modul qiymətləndirmə
- 6) Cavablar
- 7) Ədəbiyyat siyahısı.

**Açıqlamalar bölməsi.** Bu bölmədə ixtisasın şifri (kodu), elm sahəsi, ixtisaslaşmanın adı, modulun təsviri, modulun müddəti, modula başlamaq üçün zəruri olan başlanğıc şərtlər, modul ilə əldə olunacaq bilik və bacarıqlar, modulun məqsədi, təlim mühiti və avadanlıqları, ölçmə və qiymətləndirmə, təlimçilər (müəllimlər və ya məsləhətçilər), üsul və vasitələr, tədqiqat yerləri şərh olunur. Açıqlamalar bölməsinin strukturunu aşağıdakı kimi göstərə bilərik:

KOD	İxtisasın kodu yazılır
SAHƏ	Modulun aid olduğu sahə yazılır
İXTİSASLAŞMA	Modulun aid olduğu peşə (ixtisaslaşma) yazılır
MODULUN ADI	Modul vasitəsilə əldə olunacaq bilik və bacarıqları ifadə edən qısa və konkret bir ad yazılır
MODULUN TƏSVİRİ	Modulun məzmunu haqqında məlumatları özündə ehtiva edir
MÜDDƏT	40/8 – 40/16 – 40/24 – 40/32 – 40/40 Burada 1-ci hissə modula sərf olunan ümumi saatların miqda-

	rını, 2-ci hissə müəllimin rəhbərliyi altında sinifdə, emalatxanada, laboratoriyada, yaxınlıqdakı məktəblərin emalatxanalarında həyata keçirilən təlim və təhsilə ayrılan zamanı göstərir. Arada qalan fərq isə tələbənin məktəbdə və ya məktəb xaricində sərbəst şəkildə icra etdiyi fərdi və qrup çalışmaları, tədqiqatlar, ekskursiyalar, layihə hazırlığı, ev tapşırığı və s. fərdi öyrənmə fəaliyyətinə ayrılan saatların miqdarını bildirir.
BAŞLANGIÇ ŞƏRT	Modulu başlamaq üçün əvvəlcədən öyrənilməsi tələb olunan modul (modullar) adları və tələbənin hazırlıq şərtləri qeyd olunur.
MODUL İLƏ ƏLDƏ OLUNACAQ BİLİK VƏ BACARIQLAR	Modul ilə tələbənin hansı bilik və bacarıqlara yiyələnəcəyi qeyd olunur
MODULUN MƏQSƏDİ	Ümumi məqsəd: modul ilə qazandırılan bilik və bacarıqları əhatə edən ümumi bir məqsəd cümləsi yazılır Məqsədlər: moduldakı fəaliyyətlər ilə əlaqədar olan məqsədlər əməliyyatlara əsaslanaraq yazılır.
TƏLİM – TƏHSİL MÜHİTİ VƏ AVADANLIQLARI	Modulda tövsiyyə edilən mühit, avadanlıq, təlim vasitələri və materiallar təmin olunmalıdır
ÖLÇMƏ VƏ QIYMƏTLƏNDİRMƏ	Modullarda modulun tələbələr tərəfindən lazımi bilik və bacarıqların mənimsənilməsinə ölçən vasitələr və qiymətləndirmə kriteriyaları öz əksini tapmalıdır. Hər bir öyrənmə fəaliyyətinin sonunda tələbənin bu bölməni nə dərəcədə mənimsədiyini ölçən müxtəlif tipli tapşırıqlar olur. Əgər tələbə tapşırıqlara tələb olunan sayda doğru cavab verərsə növbəti öyrənmə fəaliyyətinə keçid edir, əks halda həmin bölməni təkrar edir. Hər bir modulun sonunda isə modul qiymətləndirmə tapşırıqları yer alır. Ənənəvi təhsildən fərqli olaraq modulda tələbə öz qiymətini özü müəyyən edə bilər. Modul qiymətləndirmənin necə aparılacağı əvvəlcədən müəllim tərəfindən elan edilir.
TƏLİMÇİLƏR	Modulun tətbiqi uyğun sahədə təhsili və təcrübəsi olan müəllimlərə həvalə olunmalıdır.
ÜSUL VƏ VASİTƏLƏR	Tədqiqat, söhbət, müşahidə, layihə hazırlama, sual -cavab, diskussiya, konfrans və s. kimi müxtəlif üsul və vasitələrdən istifadə oluna bilər.
TƏDQIQAT YERLƏRİ	Modulu tətbiq edəcək müəllim, əməkdaşlıq ediləcək digər sahə müəllimləri, uyğun sahə ilə əlaqədar şirkətlər, tədqiqatlar aparılacaq emalatxanalar və s. yerləri burada qeyd edərək tələbəni istiqamətləndirməlidir.

**Giriş hissə.** Bu hissənin əsas məqsədi tələbədə motivasiya yaratmaqdır. Tələbə qavramalıdır ki, o bu modulu niyə öyrənməlidir və bu modul onun üçün hansı əhəmiyyəti daşıyır. Bu vəzifəni giriş hissə yerinə yetirir. Bu məqsədlə tələbəni giriş hissəni oxuması üçün mütləq yönəltmək lazımdır.

Tələbədə motivasiya yaratmaq məqsədilə:

- İxtisas sahəsinin hal – hazırdakı və gələcəkdəki vəziyyəti haqqında
- Modulun ixtisas sahəsində yeri və rolu haqqında

- Modul nəticəsində əldə olunan bilik və bacarıqların gündəlik həyatda istifadəsi və perstiji haqqında Məlumatlar verilə bilər.

Xüsusilə də, təlim materiallarında səs və vizual vasitələrdən istifadə edilməsi tələbələrin marağını artırmağa bilər.

**Öyrənmə fəaliyyəti.** Bu hissə öz – özlüyündə bir neçə elementdən təşkil olunur:

- Məqsəd – burada fəaliyyətin sonunda tələbənin qazanacağı bilik və bacarıqlar, davranışlar əks olunur.
- Tədqiqat – bu hissə fəaliyyətə hazırlıq məqsədilə tələbəni mövzu ilə əlaqədar informasiya toplamağa yönəltmək vəzifəsi daşıyır. Tədqiqat öyrənmə fəaliyyətini dəstəkləməlidir və tələbədə tədqiqat, motivasiya, qiymətləndirmə, rəy vermə bacarıqlarını inkişaf etdirməlidir. Tədqiqat zamanı uzunmüddətli tapşırıqlardan yayınmalı, tədqiqatın qısa zamanda və asan əldə oluna bilən məlumatlara yönəldilmiş olmasına fikir verilməlidir.
- Mövzu – mövzu başlıqları modulun mündəricatındakı başlıqlarla eyni olmalıdır. Mövzuların sistemli şəkildə bir-birini izləməsinə diqqət edilməlidir. Əlavə məlumatlardan yayınmalı, qısa və konkret məlumatlara yer verilməlidir. Hər bir yaş dövründəki tələbənin mövzunu başa düşüb qavraması üçün daha anlaşıqlı sözlərdən istifadə olunmalıdır. Məlumatlar asandan çətinə doğru sıralanmalıdır. İxtisasa aid terminlərin və beynəlxalq sözlərin izahatları qeyd olunmalıdır.
- Praktika – burada tələbə mövzu üzrə qazandığı bilik və bacarıqları praktikaya tətbiq edir. Buradakı tapşırıqlar öyrənmə fəaliyyətində qeyd olunan məqsədlərə əsaslanmalıdır. Praktikanın əsas hədəfi tələbəyə mövzuya aid bilik və bacarıqları aşılamaqdır. Tələbə praktiki fəaliyyətdə tələb olunan mühit və avadanlıqlarla təmin olunmalıdır. Praktikanın üstün cəhəti ondan ibarətdir ki, tələbənin müstəqil şəkildə öyrənib tətbiq etdiyi bilik və bacarıqlar ənənəvi təhsildə əldə olunan bilik və bacarıqlardan daha qalıcıdır. Praktiki hissədə tələbəyə verilən tapşırıqlar və həmin tapşırığın həllinə aid tövsiyələr qeyd olunur.
- Ölçmə və qiymətləndirmə (ölçmə sualları, praktiki test, praktikanın qiymətləndirilməsi)–tələbələr, öyrənmə fəaliyyətində əldə etdikləri bilik və bacarıqları ölçmə vasitələri ilə ölçürlər. Ölçmə sualları ilə bilik səviyyəsi ölçülür. Praktiki testlər bacarıqların ölçülməsi funksiyasını daşıyır. Ölçmə nəticəsində tələbə öyrənmə fəaliyyətinin sonunda əldə etdikləri bilik və bacarıqları müəyyən edərək özlərini qiymətləndirirlər. Qiymətləndirmə nəticəsində tələbə məqbul nəticə əldə etmişsə, növbəti fəaliyyət və ya modula keçə bilər.

Ölçmə sualları – tələbə buradakı suallara cavab verməklə əldə etdiyi bilikləri qiymətləndirir. Ölçmə sualları hazırlayarkən aşağıdakılara diqqət etmək lazımdır:

- Sual əlavə izah tələb etməməlidir

- Müxtəlif tipli sual metodlarından istifadə etmək mümkündür (seçim, doğru – yanlış, müqayisə, fərqli variantı tapma və s.)
- Sual hazırlanarkən açıq sözlərdən istifadə olunmalı, abreviaturalardan istifadə olunmamalıdır.

Ölçmə suallarının qiymətləndirilməsini tələbə özü həyata keçirir. Belə ki, modulun sonunda yerləşən cavablardan istifadə etməklə doğru və səhv cavabları müəyyənləşdirir, verilmiş kriteriyalara əsasən öz qiymətini təyin edir. Tələbənin zəif olduğu hissələr müəllimin köməyi ilə yenidən təkrar edilir. Əgər tələbə məqbul nəticə əldə etmişdirsə, praktiki fəaliyyətə keçir.

Praktikanın ölçülməsi və qiymətləndirilməsi üçün əvvəlcədən tərtib olunmuş tapşırıqlar və qiymətləndirmə kriteriyaları qeyd olunur. Əgər tələbə praktiki hissəni müvəffəqiyyətlə başa vurmuşdursa, növbəti fəaliyyətə istiqamətləndirilir. Əks halda, fəaliyyətin təkrarlanması təmin olunmalıdır.

**Modul qiymətləndirmə.** Tələbə modulun sonundakı suallara cavab verməklə bu modul nəticəsində əldə etdiyi bilik və bacarıqları qiymətləndirir:

- Ölçmə sualları – modulu tam əhatə edən biliklərin qiymətləndirilməsini təmin edir. Tələbə modulun sonundakı cavablarla öz cavablarını tutuşdurub səhv və doğru cavablarını müəyyənləşdirir. Tələbənin zəif olduğu hissələr müəllimin köməyi ilə təkrarlanmalı, lazım gələrsə, modul təkrar edilməlidir. Tələbə məqbul nəticə əldə etdikdə növbəti modula keçid edir.
- Praktiki ölçmə - modulun sonunda tələbənin lazım olan bilik və bacarıqları əldə edib etməməsi müəyyən edilir. Buna bəzən “performans” testi də deyilir. Çünki bu ölçmə modulla əldə olunmuş bilik və bacarıqlar, vərdiş və davranışları tamamilə əhatə edir.
- Praktikanın qiymətləndirilməsi – bu bölmədə tələbənin vəziyyəti müəyyənləşdirilir: ya növbəti modula keçid edir, ya da modulun təkrarına.

**Cavablar.** Tələbənin cavablarının səhv və ya doğruluğunu yoxlamağa imkan verir. Lazım gələrsə, müəllim və tələbə cavabları birgə yoxlaya bilər.

Modul texnologiyasının İnformatika dərslərinə tətbiqini araşdırmaq üçün Web proqramlaşdırma üzrə modul proqramın hazırlanmasına baxaq. Web proqramlaşdırmaya başlamazdan əvvəl tələbə şəbəkə brauzerlərini tanımalı və onlarla işi bacarmalıdır. Həmçinin domen adlar, İP ünvanlar, URL ünvanlar haqqında məlumata sahib olmalı və onların iş prinsiplərini öyrənməlidir. Web proqramlaşdırma HTML, CSS, JavaScript və s. dilləri əhatə edir. Tərtib olunaçaq modulda dillərin mükəmməl şəkildə öyrənilməsi və tətbiqi üçün bu dillərin hər biri üçün ayrı modul hazırlamaq daha məqsədəuyğundur.

Modul nümunəsini HTML dili üzərində hazırlayaq. Modulun mündəricatını tərtib edək:

Mündəricat

1. açıqlamalar
2. giriş

### 3. öyrənmə fəaliyyəti -1

#### 3.1. Məqsəd

#### 3.2. Tədqiqat

##### 1. HTML dilinin əsas teqləri

##### 1.1. HTML dilinin sintaksisi

##### 1.1.1. <html>teqi

##### 1.1.2. <head>teqi

##### 1.1.3. <body>teqi

##### 1.1.4. <title>teqi

##### 1.2. Siyahı teqləri

##### 1.2.1. <ol>teqi

##### 1.2.2. <ul>teqi

##### 1.2.3. <li>teqi

#### 3.3. Praktiki fəaliyyət

#### 3.4. Praktiki fəaliyyətə nəzarət

#### 3.5. Ölçmə və qiymətləndirmə

### 4. Öyrənmə fəaliyyəti – 2

#### 4.1. Məqsəd

#### 4.2. Tədqiqat

##### 2. Mətnlər və onların formatlaşdırılması

##### 2.1. Mətn formatlaşdırma teqləri

##### 2.1.1. <h1>..

##### 2.1.2. <B>

##### 2.1.3. <U>

##### 2.1.4. <I>

##### 2.1.5. <BR>

##### 2.1.6. <P>

##### 2.1.7. <Font>teqi

##### 2.1.8. <hr>teqi

#### 4.3. Praktiki fəaliyyət

#### 4.4. Praktiki fəaliyyətə nəzarət

#### 4.5. Ölçmə və qiymətləndirmə

1) Modul hazırlamaq üçün ilk mərhələ açıqlamalar (izahatlar) mərhələsidir:

KOD	İxtisasın kodu yazılır
SAHƏ	Kompüter elmləri
İXTİSASLAŞMA	Web proqramlaşdırma
MODULUN ADI	HTML dili ilə sadə əməliyyatlar
MODULUN TƏSVİRİ	Bu modul HTML vasitəsilə sadə səhifələrin hazırlanması üçün lazım olan bilik və bacarıqları əldə etmək üçün vacib olan materialdır.
MÜDDƏT	40/24

BAŞLANGIÇ ŞƏRT	Vebbrauzerlərlə tanışlıq
MODUL İLƏ ƏLDƏ OLUNACAQ BİLİK VƏ BACARIQLAR	HTML kodları ilə sadə veb səhifələr hazırlamaq
MODULUN MƏQSƏDİ	Ümumi məqsəd: HTML ilə sadə veb səhifələri hazırlaya bilmək Məqsədlər: 1. HTML dilinin əsas teqləri ilə tanışlıq 2. HTML vasitəsilə mətnlərin yaradılması və formatlaşdırılması 3. HTML ilə cədvəllərin yaradılması 4. HTML – də siyahılar
TƏLİM – TƏHSİL MÜHİTİ VƏ AVADANLIQLARI	Mühit: kompüter laboratoriyası Avadanlıq: kompüter, internet əlaqəsi
ÖLÇMƏ VƏ QIYMƏTLƏNDİRMƏ	Modul daxilində olan öyrənmə fəaliyyətlərinin sonundakı ölçmə və qiymətləndirmə vasitələrindən istifadə etməklə, özünü qiymətləndirin. Modulun sonundakı modul qiymətləndirmə ilə modul üzrə əldə etdiyiniz bilik və bacarıqları qiymətləndirin. Nəticə məqbuldursa növbəti modula keçin, əks halda modulun təkrarı tövsiyyə olunur.

- 2) Modulun təşkili zamanı 2 – ci hissə Giriş hissəsidir:  
“HTML (HyperTextMarkupLanguage) veb səhifələrin hazırlanmasında istifadə olunan nişanlama dilidir. HTML kodları ilə siz veb səhifə hazırlaya, arxa fonu düzənləyə, səhifəyə müxtəlif obyektlər əlavə edib onları redaktə edə bilərsiniz. Bu modulun sonunda siz HTML dilinin kodlarından istifadə etməklə sadə veb səhifənizi hazırlaya biləcəksiniz”
- 3) Növbəti hissə - “Öyrənmə fəaliyyəti”dir:  
Məqsəd: HTML dilinin əsas teqlərini öyrənəcəksiniz.  
Tədqiqat: vebbrauzerlər hansılardır? Daha hansı vebproqramlaşdırma dillərini tanıyırsınız?
2. HTML dilinin əsas teqləri
    - 2.1. HTML dilinin sintaksisi
      - 2.1.1. <html>teqi
      - 2.1.2. <head>teqi
      - 2.1.3. <body>teqi
      - 2.1.4. <title>teqi
    - 2.2. Siyahı teqləri
      - 2.2.1. <ol>teqi
      - 2.2.2. <ul>teqi
      - 2.2.3. <li>teqi
- 4) Praktiki fəaliyyət (nümunə)

əməliyyatlar	Təvsiyələr
“modul_tehnologiyaları” adlı sadə HTML faylı yaradın.	Notepad Mətn redaktorunu açın. Faylı yaratdıqdan sonra File/Save as əmri ilə fayl adına “modul_tehnologiyaları”, tipinə isə .htm qeyd edin.
Aşağıdakı görüntünü əldə etmək üçün hansı teqlər istifadə olunmalıdır? 1. Mətn redaktorları <ul style="list-style-type: none"> <li>• Notepad</li> <li>• Wordpad</li> <li>• Lexicon</li> </ul> 2. Cədvəl redaktorları <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lotus</li> <li>• QuattroPro</li> <li>• Excel</li> </ul>	Siyahı teqlərindən istifadə edin

Praktiki fəaliyyətə nəzarət – burada tələbənin praktiki fəaliyyəti necə icra etdiyinə nəzarət olunur. HTML teqlərindən düzgün istifadə edib-etmədiyi yoxlanılır.

Qiymətləndirmə - praktiki fəaliyyətdə tələbənin yerinə yetirə bilmədiyi və ya çətinlik çəkdiyi hissələr təkrar edilir. Əgər bütün tapşırıqları yerinə yetirmişsə, ölçmə və qiymətləndirmə bölməsinə keçilir.

5) ölçmə və qiymətləndirmə (nümunə)

Aşağıdakı mülahizələrin doğru və ya yanlışlığını müəyyən edin. Doğru isə TRUE, yanlış isə False qeyd edin.

a. <title>teqi web səhifənin adını təyin edir.

b. <ol>teqi nizamlı siyahı yaradır.

c. <ul>teqi nizamlı siyahı yaradır.

d. <table>teqi mətni cədvələ salır.

e. <tr>teqi cədvəlin sətirlərini təyin edir.

Qiymətləndirmə. Cavablar bölməsindən istifadə etməklə cavablarınızı yoxlayır. Əgər tərəddüd etdiyiniz sual varsa, təkrar edin. Bütün cavablarınız doğrudursa, növbəti öyrənmə fəaliyyətinə keçin.

6) Öyrənmə fəaliyyəti – 2

Məqsəd – HTML dilində mətnlər və onların formatlaşdırılması qaydalarını öyrənmək

Tədqiqat – mətnlərin görünüşünü dəyişmək üçün hansı teqlərin istifadə olunduğunu araşdırın.

2. Mətnlər və onların formatlaşdırılması

2.1. Mətn formatlaşdırma teqləri

2.1.1. <h1>..

######

- 2.1.2. <B>
  - 2.1.3. <U>
  - 2.1.4. <I>
  - 2.1.5. <BR>
  - 2.1.6. <P>
  - 2.1.7. <Font>teqi
  - 2.1.8. <hr>teqi
- 7) Praktiki fəaliyyət

Əməliyyatlar	Tövsiyələr				
Brauzerdə aşağıdakı görüntünü əldə etmək üçün hansı kodlar yığılmalıdır? <b><u>Modul texnologiyaların tətbiqi</u></b>	<i>,<b>,<u>,<font color>teqlərini istifadə edin				
<table border="1"> <tr> <td>X<sup>2</sup></td> <td>CSS</td> </tr> <tr> <td><u>PHP</u></td> <td>JAVASCRIPT</td> </tr> </table>	X <sup>2</sup>	CSS	<u>PHP</u>	JAVASCRIPT	Superscript və sbscriptlərdən istifadə edin
X <sup>2</sup>	CSS				
<u>PHP</u>	JAVASCRIPT				

Praktiki fəaliyyətə nəzarət - burada tələbənin praktiki fəaliyyəti necə icra etdiyinə nəzarət olunur. HTML teqlərindən düzgün istifadə edib-etmədiyi yoxlanılır.

Qiymətləndirmə - praktiki fəaliyyətdə tələbənin yerinə yetirə bilmədiyi və ya çətinlik çəkdiyi hissələr təkrar edilir. Əgər bütün tapşırıqları yerinə yetirmişsə, ölçmə və qiymətləndirmə bölməsinə keçilir.

#### 8) Ölçmə və qiymətləndirmə

Aşağıdakı suallara cavab verin

1. Mətni altdan xəttli yazmaq üçün hansı teq istifadə olunmalıdır?
  - a) <p>
  - b) <i>
  - c) <u>
  - d) <hr>
2. Mətni qalın yazmaq üçün hansı teq istifadə olunmalıdır?
  - a) <b>
  - b) <i>
  - c) <br>
  - d) <u>
3. Yazı tipi hansı əmrlə təyin edilir?
  - a) <font size>
  - b) <font color>
  - c) <font face>
  - d) <font name>
4. <hr align="center">kodunun vəzifəsi nədir?
  - a) yazını mərkəzə doğru yazdırır



b) yazını sağa doğru yazdırır

c) səhifənin ortasına üfüqi xətt çəkir

d) səhifənin ortasına şaquli xətt çəkir

Qiymətləndirmə Cavablar bölməsindən istifadə etməklə cavablarınızı yoxlayır. Əgər tərəddüd etdiyiniz sual varsa, təkrar edin. Bütün cavablarınız doğrudursa, növbəti öyrənmə fəaliyyətinə keçin.

Modul qiymətləndirmə

Aşağıdakı sualları cavablayın.

1. Mətni qalın (bold) yazmaq üçün hansı teqdən istifadə olunur?

a) <h1>

b) <b>

c) <i>

d) <u>

e) <p>

2. Yazının şrifini 5 təyin etmək üçün hansı yazılış doğrudur?

a) <font name="5">

b) <font width="5">

c) <font height="5">

d) <font size="5">

e) font="5"

3. Cədvəldə yeni bir sütun yaratmaq üçün hansı teq istifadə olunur?

a) <tr>

b) <table>

c) <td>

d) <th>

e) <column>

4. Aşağıdakı target parametrlərindən hansı linki yeni pəncərədə açır?

a) \_blank

b) \_self

c) \_parent

d) \_top

e) \_new

5. Mətni yeni sətirdən yazmaq üçün hansı teqdən istifadə olunur?

a) <hr>

b) <p>

c) </n>

d) <head>

e) <br>

Cavablar

öyrənmə fəaliyyəti – 1

A	TRUE
B	TRUE

C	FALSE
D	FALSE
E	TRUE

öyrənmə fəaliyyəti – 2

1	C
2	A
3	D
4	C

Modul qiymətləndirmənin cavabları

1	B
2	D
3	C
4	A
5	E

Ədəbiyyat siyahısı

1.w3schools.com

2.ErmanYükseltürk, Temel HTML Eğitimi

#### ƏDƏBİYYAT

1. Bilgin, İ. ve Durmuş, S. (2003). Öğrenme Stilleri İle Öğrenci Başarısı Arasındaki İlişki Üzerine Karşılaştırmalı Bir Araştırma. Kuramdan Uygulamaya Eğitim Bilimleri Dergisi, 3(2): 381-393.
2. Fer, S. (2000). Modüler Program Yaklaşımive Bir Öneri. Milli Eğitim Dergisi, 147: 21-37, ISSN 1301-7669.
3. Gordijn, J. veNijhof, W.J. (2002). Effects of complex feed back on computer- assisted modular instruction. Journal of Computers and Education, 39(2): 183-200.
4. Gömlüksiz, M. N. (2002). An individual approachin English language teaching: an evaluation of modular teachin genvironment and modular teaching. Educational Sciences: Theory and Practice, 2(2): 420-424.
5. Grasha, A. F. (2002). Teaching With Style, A Practical Guide to Enhancing Learningby Understanding Teaching and Learning Style, U.S.A.
6. Gürol, M. (2005). Oluşturmacı öğrenme yaklaşımının uzmanlaşmaya etkisi. TheTurkish Online Journal of Educational Technology – TOJET, 4(1): 141-145.
7. Judkins, S.K. ve Ingram, M. (2002). Decreasing Stress Among Nurse Manager: A Long-Term Solution. Journal of Continuing Educationin Nursing, 33(6): 259-264.
8. Latuszek, D. (2004). A Comparison Of The Effectiveness Of TwoTeaching Modalities For Pre-College Level Mathematics Courses at a two- year College. Basılmamış doktora tezi, Western MichiganUniversity, Michigan, July 26.
9. MEGEP (2006). Öğretim Programları ve Modüler Öğretim Uygulama Kılavuzu. Ocak, Ankara.
10. Özkan, H.H. (2005). İşbirliğine dayalı öğrenme ve modüler öğretim yöntemlerinin birlikte uygulanmasının akademik başarıya etkisi. 5- 7 Eylül 2005 İstanbul, 1. Uluslar arası Mesleki ve Teknik EğitimTeknolojileri Kongresinde sunulmuş bildiri.
11. Reed, P.A. (2001). Learning Style and Laboratory Preference: A Study of Middle School Technology EducationTeachersinVirginia. Journal of Technology Education, 13(1): 59-71.
12. Yazıcı, H.J. (2005). A study of collaborative learning style and teamlearning performance. Journal of Education and Training, 47(3), 216-229.

13. Zereyak, E. (2006). İnternet tabanlı işbirlikçi öğretimde grup yapısı ve öğrenme stilinin akademik başarı ve etkileşim düzeyine etkisi. Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eğitim Programları ve Öğretimi Bilim dalı, Basılmamış Doktora Tezi.
14. Adıgüzel, O.C. (2007) Mesleki ve Teknik Ortaöğretim. M. Sağlam (Edt.), Türk Eğitim Tarihi içinde (ss. 153-176). Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Açık öğretim Fakültesi Yayını.
15. Blanchet, A., Gotman, A. (2001). L'enquête et ses méthodes de l'entretien, Paris : Nathan Université.
16. Fer, S. (2000). Modüler Program Yaklaşımı ve Bir Öneri, Milli Eğitim Dergisi, 147, 21- 37.
17. Organisation for Economic Co-operation and Development (2010). From Initial Education to Working Life: making transitions work, preliminary edition. T.A. Davies ve F. Farquharson (Eds.), The Learnership Model of Workplace Training and Its Effective Management: lessons learnt from a Southern African case study içinde Journal of Vocational Education and Training, Volume 56, Number 2, London: Routledge.
18. Yağcızeybek, S. (2006). Mesleki ve teknik eğitimin önemi, <http://www.milliegitim.biz> adresinden 26 Nisan 2018 tarihinde elde edilmiştir.
19. Yıldırım, A., Şimşek H. (2018). Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri. (Beşinci Baskı). Ankara: Seçkin.

## СОСТАВЛЕНИЕ МОДУЛЬНЫХ ПРОГРАММ ПО ПРЕДМЕТУ ИНФОРМАТИКИ

М.А.АЛЫШОВ, Н.А.ИМАНОВА, М.С.ХАЛИЛОВ

### РЕЗЮМЕ

В данной работе изучены применения модульных технологий на уроках информатики. Актуальность данной работы заключается в том, что быстроразвивающийся технический прогресс диктует новые условия для обучения и предъявляет новые требования в профессии. В рамках обучения учащийся частично или полностью самостоятельно может работать с предложенной ему учебной программой, которая содержит в себе целевую программу действий, базы информации и методическое руководство для достижения поставленных дидактических целей.

**Ключевые слова:** Технология модульного обучения, модульные программы, деятельность изучения, модульное оценивание.

## DEVELOPMENT OF MODULAR PROGRAMS ON THE SUBJECT OF INFORMATICS

M.A. ALYSHOV, N.A. IMANOVA, M.S. KHALILOV

### SUMMARY

In this paper, studied the use of modular technology in the classroom informatics. The relevance of this work lies in the fact that the rapidly developing technical progress dictates new conditions for learning and makes new demands in the profession. As part of the training, the student can, partially or fully independently, work with the curriculum offered to him, which contains a targeted action program, databases and methodological guidelines for achieving the set didactic goals.

**Key word:** modular learning technology, modular programs, learning activities, modular assessment.

*Redaksiyaya daxil oldu: 09.04.2019-cu il*  
*Çapa imzalandı: 28.12.2019-cu il*

## FİZİKA

UDK 532

**POLİETİLENQLİKOL-LİMON TURŞUSUNUN Na DUZU- SU İKİFAZALI SİSTEMİNİN AYIRDETMƏ QABİLİYYƏTİNƏ KİÇİKMÖLEKULLU BİRLƏŞMƏLƏRİN TƏSİRİ****E.Ə.MƏSİMOV, G.M.ŞAHBAZOVA, S.Y.OCAQVERDİYEVA***Bakı Dövlət Universiteti*  
*Shahbazova.gunel@mail.ru*

*Təqdim olunan işdə polietilenqlikol-limon turşusunun Na duzu -su ikifazalı sistemində bəzi əlavələrin (duzların, spirtlərin) və temperaturun təsirinə baxılmışdır. Baxılan ikifazalı sistemin ayırdeTMə qabiliyyəti təyin olunmuş və ona əlavələrin təsiri öyrənilmişdir. Temperaturun və əlavələrin təsiri ilə binodalların bəziləri homogen oblast, digərləri isə heterogen oblast istiqamətində sürüşürlər.*

*Əgər binodal koordinat başlanğıcından uzaqlaşırırsa, yəni homogen oblast böyüyürsə, deməli əlavə olunan maddə komponentlərin suya hərisliklərinin fərfini azaldır, sistemdə suyun strukturunu dağıdır və fazalara ayrılma çətinləşir və fazaəmələgətirən komponentlərin konsentrasiyalarının daha böyük qiymətlərində baş verir və əksinə.*

**Açar sözlər:** ikifazalı sistemlər, polietilenqlikol, limon turşusunun Na duzu, ayırdeTMə qabiliyyəti

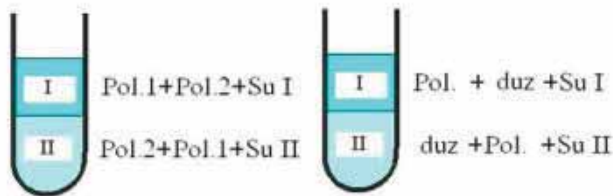
Bioloji aktiv hissəciklər qarışıqlarının ayrılması, təmizlənməsi və tədqiqi çox vacib tibbi-bioloji problemlərdən hesab olunur. Təsadüfi deyil ki, tibb, farmakoloji və yeyinti sənayelərinin bu sahənin qarşısında qoyduğu tələblər gündən-günə artır.

Qeyd edək ki, kimyəvi maddələrin ayrılması üçün çoxlu sayda metodlar mövcuddur. Bioloji materialların ayrılması və təmizlənməsi üçün də xüsusi metodlar işlənib hazırlanmışdır, lakin bu metodlar mürəkkəb ağır həcmli avadanlıqlar tələb edir və çox baha başa gəlirlər.

Keçən əsrin axırlarında İsveç alimi Albertson [1] bioloji obyektlərin ayrılması və təmizlənməsi üçün yeni, ucuz başa gələn, sadə, “yumşaq” metod işləyib hazırlamışdır. Bu metod, maddələrin su-polimer ikifazalı sistemində qeyri-bərabər paylanmasına əsaslanmışdır.

Bu metodun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, iki müxtəlif təbiətli polimerin və ya bir polimerin və bəzi üzvi və qeyri-üzvi kiçikmolekullu birləşmələrin su-

da məhlulları (qarışıqları), komponentlərin konsentrasiyalarının müəyyən qiymətlərindən böyük qiymətlərdə tarazlıqda olan və bir-birində həll olmayan iki maye fazaya ayrılırlar, homogen – geterogen faza keçidi baş verir (şəkil 1).



Şək. 1.

Sistemin fazalarının biri komponentlərin biri ilə, digəri isə başqa komponentlə zəngin olur. Hər iki fazanın əsasını su təşkil edir (70÷90%-a qədər).

Belə sistemə bioloji obyektlər (zülallar, hüceyrələr, viruslar və c.) qarışığı daxil edildikdə onların hər bir növü sistemin bu və ya digər fazasında toplanırlar. Biomaterialların ikifazalı sistemdə paylanması onların fərdi xüsusiyyətlərindən, fazaəmələgətirən komponentlərinin təbiətindən və konsentrasiyasından, sistemə edilən əlavələrin konsentrasiyasından və təbiətindən asılıdır. İkifazalı sistemlərdə maddələrin paylanması, paylanma əmsalı ilə xarakterizə

olunurlar  $K = \frac{C_I}{C_{II}}$ ;  $C_I$  və  $C_{II}$  I və II fazalarda paylanan maddənin

konsentrasiyalarıdır. Paylanma prosesində biomaterialların strukturları zədələnmir, bioloji aktivliklərini itirmirlər, çünki ikifazalı sistemin əsasını bioobyektlərin doğma mühiti olan su təşkil edir.

Bu metodun çox vacib olan üstün cəhətlərindən biri odur ki, paylanma prosesi laboratoriya şəraitindən kəsilməz rejimdə biotexnoloji sənaye şəraitinə asanlıqla köçürülə bilər. Qeyd etmək lazımdır ki, paylanmadan alınan məhsulların keyfiyyəti baxımından bu metodun analoqu yoxdur.

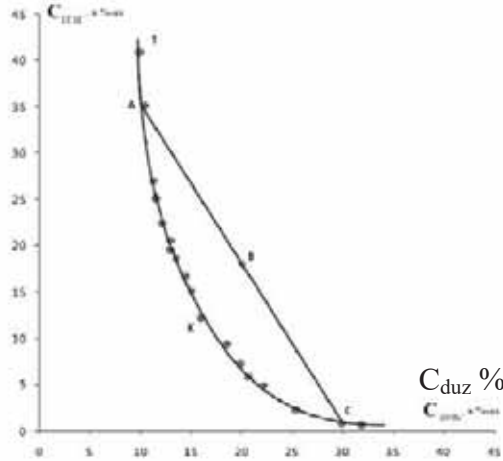
Hal-hazırda bu metod sürətlə inkişaf etmiş və tətbiq sahələri xeyli genişlənməmişdir. Onların bəzilərini sadalamaq maraqlı olar:

1. biomaterialların ayrılması və təmizlənməsi.
2. yüksəkmolekullu birləşmələrin (polimerlərin) fraksiyalara ayrılması
3. suda həll olan istənilən maddələrin, xüsusən polimerlərin və bioobyektlərin heç bir üsulla təyin oluna bilməyən nisbi hidrofobluqlarının kəmiyyətcə qiymətləndirilməsi.
4. Müəyyən olunmuşdur ki, maddənin ikifazalı sistemdə paylanma əmsalının dəyişməsi, xarici amillərin (radiasiya və s.) təsiri nəticəsində canlı orqanizmdə baş verən patoloji dəyişikliklərin göstəricisi kimi qəbul

edilə bilər. Başqa sözlə, bu metod ilkin tibbi diaqnostikada istifadə olunur.

5. Bu metod maddələrin canlı orqanizmlərdə paylanması (maddələr mübadiləsinin) mexanizmini başa düşməyə imkan verir və canlı orqanizmə çoxfazlı, çoxkomponentli sistem kimi baxmaq təsəvvürünə gətirib çıxarır. Məsələn, qan – toxuma mayesi, toxuma mayesi – hüceyrə mayesi və s.

İkifazlı su – polimer sistemlərini tədqiq etmək üçün sistemin hal diaqramından istifadə olunur. Şəkildə təqdim olunan diaqramın koordinatlarında fazaəmələgətirən komponentlərinin konsentrasiyaları göstərilmişdir (şəkil 2).



T=298,15K temperaturda PEQ- kəhrəba turşusunun natrium duzu ikifazlı su sisteminin binodal əyrisi və birləşdirici xətti

## Şək. 2.

Şəkil 2-dəki əyri (binodal əyrisi) sistemin tarazlıqda olan homogen (bir-fazlı) və heterogen (ikifazlı) oblastlarını bir-birindən ayıran nöqtələrin hən-dəsi yeridir. Komponentlərinin B nöqtəsinə uyğun ümumi konsentrasiyalarında sistem iki fazaya ayrılır və bu fazalarda komponentlərin konsentrasiyaları A (yuxarı və ya I faza) və C (aşağı və ya II faza) nöqtələrinin koordinatları ilə müəyyənləşir. Birləşdirici xətt (BX) və ya nod adlanan AC xəttinin üzərində olan istənilən nöqtəyə (tərkibə) uyğun ümumi konsentrasiyaya malik sistemin fazalarında komponentlərin konsentrasiyaları da A və C nöqtələrinin koordinatlarına uyğun olur. BX üzərində nöqtənin vəziyyəti (koordinatları) tarazlıqda olan fazaların həcmələrinin nisbətini göstərir.

Fazaların həcmələri və tərkibləri eyni olan və binodalın üzərində olan K nöqtəsi hipotetik ikifazlı sistemin kritik nöqtəsi adlanır.

Sistemin fazalara ayrılmasının mexanizmi çoxlu sayda tədqiqatçılar tərəfindən öyrənilmiş və göstərilmişdir ki, |2-4| polimer cütünün suda məhlullarında hər bir komponentin suya strukturlaşdırıcı və dağıdıcı təsirlərinin, hidrofil və hidrofob hidratasiya mexanizmlərinin, bir sözlə, su ilə q/təsirlərinin müxtəlifliyi nəticəsində sistemdə iki müxtəlif termodinamik hala malik su strukturları əmələ gəlir ki, bu da sistemin fazalarına uyğun olur. Bu səbəbdən ikifazlı sistemə daxil edilmiş maddələr iki müxtəlif strukturlu su mühitinə olan fərqli hərislikləri, fərqli qarşılıqlı təsirləri nəticəsində sistemdə qeyri-bərabər paylanırlar və bu paylanma, paylanma əmsalı ilə xarakterizə olunur:

$$K=C^I/C^{II}$$

Ümumiyyətlə, istənilən maddənin su ilə qarşılıqlı təsirini xarakterizə etmək üçün hidrofob və hidrofil hidratasiya anlayışlarından geniş istifadə olunur. Bu terminlərə aydınlıq gətirmək üçün su ilə bağlı bəzi məqamlara toxunaq.

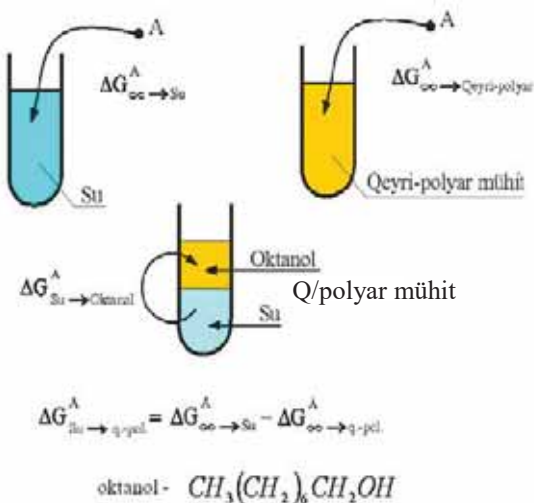
Məlum olduğu kimi, möcüzəli su, canlı aləmin əsasını təşkil edir, canlı orqanizmlərdə gedən, istinasız, bütün proseslərdə aktiv iştirak edir və bu proseslərə öz köklü təsirini göstərir. Suyu xarakterizə edən əksər xassələrdə anomallıqlar müşahidə olunur. Bu anomallıqlar suyun molekulları arasında, enerjilərinin qiyməti kimyəvi rabitə enerjiləri ilə fiziki qarşılıqlı təsirlərin enerjiləri arasında olan, hidrogen rabitələrinin mövcudluğu ilə əlaqədardır.

Suyun spesifik xüsusiyyətlərindən ən maraqlı təzahürü, suya qeyri-polyar qruplar saxlayan maddələr daxil edildikdə, müşahidə olunan “hidrofob” effektdir. Qeyri-polyar qruplar su tərəfindən itələnir. Qeyd etmək lazımdır ki, elmi ədəbiyyatda “hidrofobluq”, “hidrofillik”, hidrofob qarşılıqlı təsirlər kimi anlayışların düzgün başa düşülməsində uzun müddət müxtəlif çətinliklər mövcud olmuşdur. Müasir təsəvvürlərə görə hidrofobluq maddənin (atomun, uonun, molekulun və s.) səthinin su ilə qarşılıqlı təsiri sərbəst enerjisi ilə xarakterizə olunur ( $\Delta G$ ), “hidrofillik” hidrofobluğun tərsidir. Bütün yüklü və polyar qruplar hidrofildirlər, suya hərisdirlər, suda yaxşı həll olurlar və olduqları molekulların suda həll olmasını asanlaşdırırlar, qeyri-polyar maddələr isə hidrofobdurlar, suda pis həll olurlar və ya heç həll olmurlar. Özündə həm polyar, həm də qeyri-polyar qruplar saxlayan bifil bioloji molekulların isə suda həll olması bu iki növ qrupların su ilə qarşılıqlı təsirlərinin incə balansı ilə müəyyən olunur.

Beləliklə, təbiidir ki, elmi ədəbiyyatda maddənin (şəkil 3-də A maddəsi) suya hərisliyini, başqa sözlə, nisbi hidrofobluğunu, onu sonsuzluqdan su mühitinə və qeyri-polyar mühitə köçürmək üçün lazım olan sərbəst enerjilərin fərqi ilə və ya sudan qeyri-polyar mühitə köçürmək üçün lazım olan sərbəst enerji ilə xarakterizə etmək qəbul olunmuşdur və aşağıdakı kimi ifadə olunur.

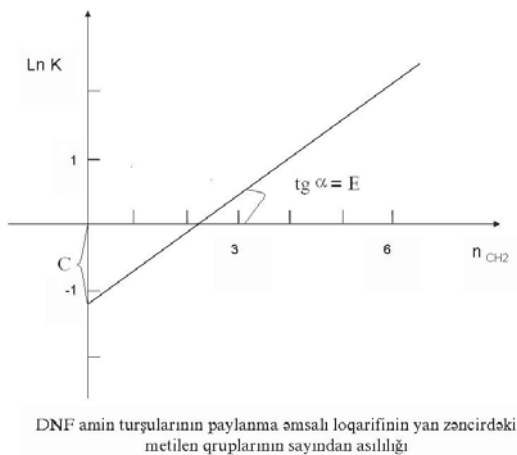
Maddənin və onun suda məhlulunun hidrofobluğunu təyin etmək üçün, markerlar adlanan, polyar qrupu dəyişməyən, alifatik zəncirləri isə karbon atomlarının (və ya metilen qruplarının) sayı  $n_{CH_2}$  ilə fərqlənən dinitrofenilləşdirilmiş (DNF) amin turşuları sırasını (markerləri) ikifazlı sistemdə (su –

qeyri-polyar mühit və ya ikifazlı polimer-su sistemlərində) paylanması təklif olunmuşdur [5-6].



Şək. 3.

Şəkil 4-də su-oktanöl ikifazlı sistemində markerların paylanmasından alınan nəticələr -  $\ln k - n_{CH_2}$  asılılığı kimi göstərilmişdir.



Şək. 4.

Göründüyü kimi bu asılılıq

$$\ln = C + E \cdot n_{CH_2} \quad (1)$$



xətti tənliyi ilə təsvir olunur. Burada C və E fiziki mənalı aşağıda göstərilən sabitlərdir,  $n_{CH_2}$  - paylanan sırada karbon atomlarının sayıdır. Paylanmanın Bolsman paylanmasına uyğun olduğunu nəzərə alsaq, ( $\Delta G \ll kT$ )

$$K = \frac{C_I}{C_{II}} = \ell^{-\frac{\Delta G}{kT}} \quad (2)$$

və (2)-in hər tərəfini RT-yə vursaq aşağıdakı ifadələri yazı bilərik:

$$RT \ln K = -RTC - RTE \cdot n_{CH_2}$$

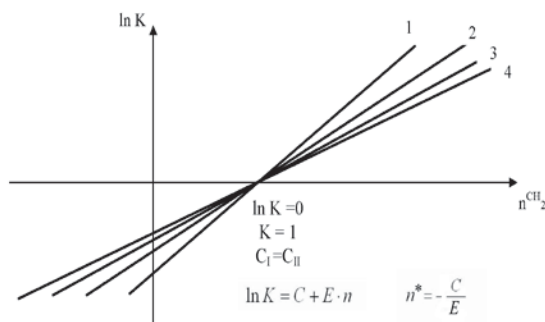
$$RT \ln K = -\Delta G_{I \rightarrow II}^{mol} \quad (3)$$

$$\Delta G_{I \rightarrow II}^{CH_2} = -RTE \quad (4)$$

$$RTC = -\Delta G_{I=(2)} \quad (5)$$

Burada (3) ifadəsi bütöv molekulun sistemin I fazasından II fazasına keçməsi üçün lazım olan sərbəst enerjini, (4) ifadəsi bir metilen qrupunun fazalararası keçid sərbəst enerjisini və (5) ifadəsi isə DNF amin turşuları molekullarında sabit polyar qrupun fazalararası keçid sərbəst enerjisini xarakterizə edir. Başqa sözlə, C parametri DNF amin turşuları sırasında olan sabit polyar hidrofilyar qrupun fazalardakı su mühitlərində hidrofilyar hidratlaşmada iştirak etmə qabiliyyətlərinin fərqi, E-parametri isə, bir metilen qrupunun fazaların su mühitlərində hidrofob hidratlaşma qabiliyyətlərinin fərqi xarakterizə edir.

Qeyd etdiyimiz kimi, qeyri-polyar maddələr su mühitinə daxil edildikdə, onlar su tərəfindən itələnilir. Bu effekt “hidrofob” effekt adlanır.



1, 2, 3, 4 sistemdə fazaəmələgətirən komponentlərin müxtəlif konsentrasiyalarına uyğundur

**Şək.5.**

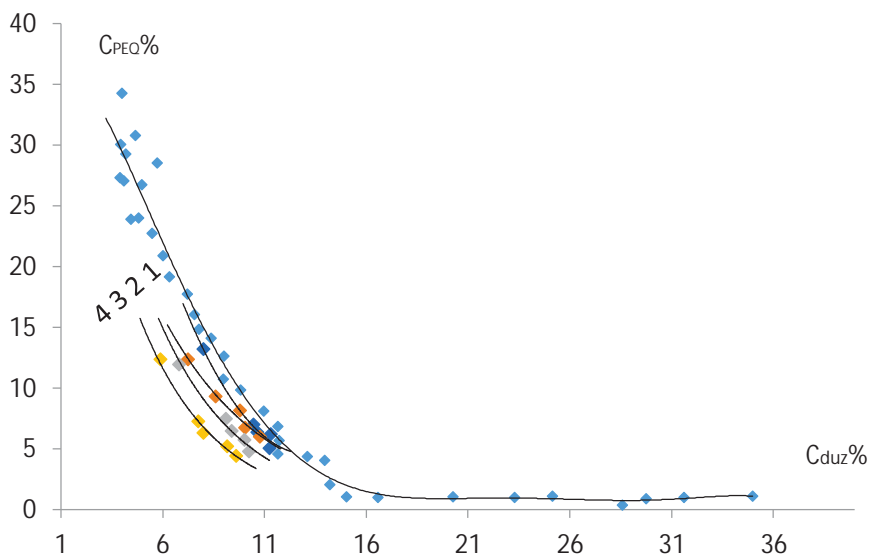
Hidrofob effekt nəticəsində sudan itələnən qeyri-polyar qruplar bir-birinə çox yaxın məsafələrə toplanaraq hidrofob qarşılıqlı təsirlərdə olurlar, bu hidrofob hidratasiyadır. Qeyri-polyar hissəciklərin suya hərisliyinin kiçik olması, yəni onların nisbi hidrofobluğu, həllolma prosesində sistemin entropiyasının azalması ( $\Delta S < 0$ ) sərbəst enerjisinin isə artması ilə əlaqədardır ( $\Delta G > 0$ ). Bu isə energetik cəhətdən əlverişli olmadığından qeyri-polyar hissəciklər sudan itələnirlər. Bu zaman su daha da strukturlaşır və su ilə kontaktda az olmasını təmin edən kompakt strukturlar yaranır və belə sistemdə (mühitdə) biostrukturların aktiv konformasiyaları daha da stabilləşir.

Tədqiqatlar göstərmişdir ki, [4] ikifazlı sistemləri tam, birqiymətli xarakterizə etmək üçün C və E parametrlərindən istifadə etmək korrekt deyil, çünki 5-ci şəkildən görüldüyü kimi bu parametrlərin qiymətləri fazaəmələgətirən polimerlərin sistemdəki ümumi konsentrasiyalarından asılıdır və verilmiş ikifazlı sistemi birqiymətli xarakterizə edə bilməz.

Lakin görüldüyü kimi, komponentlərin sistemdəki marker maddələrdə metilen qruplarının sayını müəyyən  $n^*$  qiymətində bütün konsentrasiyalar üçün  $\ln k = 0$ ,  $k = 1$ ;  $C_I = C_{II}$  və  $n^* = \frac{C}{E}$  olur. Beləliklə,  $n^*$  - metilen qruplarının elə hipotetik sayıdır ki, paylanan maddə sistemdə bərabər paylanır, yəni  $n = n^*$  olduqda paylanan maddənin molekulunun hidrofob fraqmenti ilə hidrofil fraqmentinin  $\ln K$ -ya verdiyi paylar bir-birini tam kompensə edirlər. Dediklərimizdən aydın olur ki,  $n^*$  - parametri verilmiş sistemi tam xarakterizə edə bilər və onu ikifazlı sistemin fazalarının su mühitlərinin strukturlarının fərqi göstəricisi kimi qəbul etmək olar,  $n^*$ -un qiyməti böyük olduqda fazaların su mühitləri daha çox fərqlənirlər və sistem daha böyük ayırma qabiliyyətinə malik olur. Ona görə də bu parametr ikifazlı sistemin ayırdetmə qabiliyyəti adlandırılmışdır [4,5].

Aydındır ki,  $n^*$  parametrlərinin qiymətini dəyişdirmək və idarə etmək, müxtəlif təbiətli bioobyektlərin qarışıqlarını ayırmaq çox vacibdir və bunun üçün sistemə hansı yollarsa təsir etmək lazımdır. O yollardan biri temperaturun dəyişməsi yolu, digər yol isə, sistemə paylanma prosesində müxtəlif maneədar təsirləri olmayan əlavələrin edilməsidir.

İşdə tədqiq edilən PEQ-limon turşusunun natrium duzu-su ikifazlı sistemə müxtəlif kimyəvi təbiətli kiçikmolekullu birləşmələri əlavə etməklə  $n^*$ -parametrinin qiymətləri təyin edilmişdir. Sözsüz ki, bu əlavələr ikifazlı sistemin hal diaqramına da öz təsirini göstərməlidir [7,8]. Cədvəl 1-də və 6,7,8-ci şəkillərdə müxtəlif əlavələrin və temperaturun PEQ-Na<sub>limon</sub>-su ikifazlı sisteminin ayırdetmə qabiliyyətləri verilmişdir.

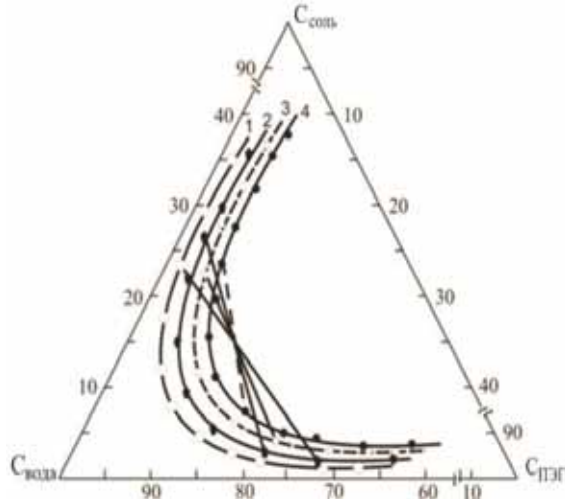


**Şək. 6.** Kalium sulfat duzunun ikifazalı PEQ-limon turşusunun Na duzu-su sisteminin binodal ayrısına təsiri  
1-0,2M , 2-0,3M, 3-0,4M, 4-0,5M  $K_2SO_4$

Şəkil 6-dan görüldüyü kimi,  $K_2SO_4$  duzunun təsiri ilə ikifazlı sistemin binodal ayrısı koordinant başlanğıcına doğru sürüşür və hal diaqramının heterogen oblastı böyüyür. Duzun konsentrasiyası artdıqca bu sürüşmə də böyüyür. Alınan nəticə onu göstərir ki,  $K_2SO_4$  duzu suyu strukturlaşdırır. İkifazlı sistemin komponentlərinin suda həll olması və uyğun olaraq uyuşmaları çətinləşir və sistemin fazalara ayrılması komponentlərin daha kiçik konsentrasiyalarında baş verir.

Cədvəl 1

Əlavə	$n^*$
karbamid 1 mol/l	5,52
karbamid 1,25 mol/l	5,20
saxaroza 0,196 mol/l	8,36
qlyukoza 0,37 mol/l	7,19
Su	9,3
$NaNO_3$ (4,67 mol/l)	12,6
$Na_2CO_3$ (3,76 mol/l)	13,5
$Na_2SO_4$ (1,79 mol/l)	14,6
$K_2SO_4$	14,35
KCl (5,5mol/l)	7,19
KBr (3,53 mol/l)	6,98
KJ	10,6

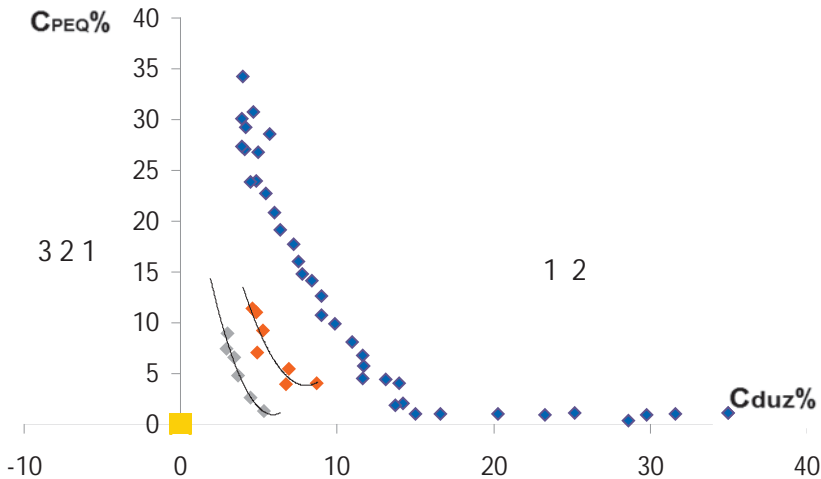


**Şək. 7.**

PEQ-limon turşusunun Na duzu-su ikifazlı sisteminin müxtəlif temperaturlarda binodal əyrisi  
1- 60<sup>0</sup>C; 2- 40<sup>0</sup>C; 3- 25<sup>0</sup>C; 4- 10<sup>0</sup>C.

Qeyd edək ki, bütün istifadə olunan sistemlərin hal diaqramına temperaturun təsiri eynidir. Temperaturun artması ilə binodal əyriyi koordinat başlanğıcından uzaqlaşır, homogen oblastın sahəsi artır.

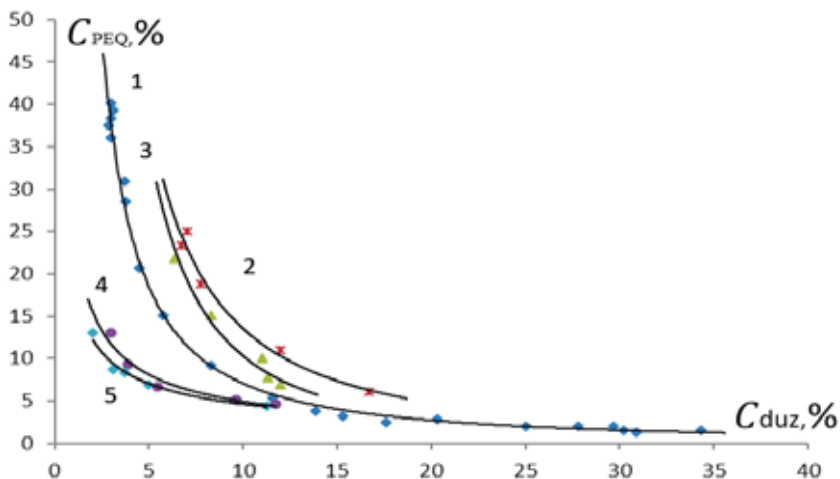
Bu onunla əlaqədardır ki, temperaturun artması molekulların istilik hərəkətlərinin intensivləşməsi nəticəsində sistemdə suyun strukturu dağılır, polimerlərin suda həll olması və uyuşmaları artır və sistemin fazalara ayrılması suya strukturlaşdırıcı təsir göstərən polimerlərin daha kiçik konsentrasiyalarında baş verir.



**Şək. 8.** PEQ-limon turşusunun Na duzu-su ikifazlı sisteminin binodal əyrisinə 1-NaNO<sub>3</sub>-ün təsiri, 2-Na<sub>2</sub>CO<sub>3</sub>-ün təsiri, 3- binodala Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>-un təsiri

Natrium duzlarının ikifazlı PEQ-limon turşusunun Na duzu-su ikifazlı sistemin hal diaqramına təsirinin tədqiqi göstərir ki, (şəkil 10) kationları dəyişməyən bu duzların

Anionlarının təsiri nəticəsində binodal heterogen oblastın artması istiqamətində sürüşür. Bu sulfat turşusu duzlarının suyu strukturlaşdırdığı təsirinin nəticəsidir və şəkil 6-da  $K_2SO_4$  duzunun binodala təsiri bu nəticəni bir daha təsdiq edir.  $K_2SO_4$  duzunun konsentrasiyasını artırıdıda bu effekt (binodalın koordinat başlanğıcına doğru sürüşməsi) daha da böyük olar.



**Şək. 9.** PEQ-limon turşusunun Na duzu-su ikifazlı sisteminin 1 binodal əyrisinə 2-metanol ( $CH_3OH$ )–un təsiri təsiri, 3-etanol ( $CH_3CH_2OH$ )–un təsiri, 4-propanol ( $CH_3CH_2CH_2OH$ ) (0,3mol/l), 5-propanol (0,5 mol/l)–un təsiri

Şəkil 9-da bir sıra biratomlu spirtlərin PEQ-limon turşusunun Na duzu-su ikifazlı sistemin hal diaqramına təsiri göstərilmişdir. Alınan nəticələr göstərir ki, metanol və etanol binodal əyrisini homogen oblastın sahəsinin artması istiqamətində, propanol isə əks istiqamətdə sürüşdürür.

Hesab etmək olar ki, hidrosil qrupunun su ilə qarşılıqlı təsiri, onun suya dağıdıcı təsiri, etanol və metanolun hidrofob qruplarının suya strukturlaşdırıcı təsirini üstələyir. Nəticədə fazalara ayrılma komponentlərin daha böyük konsentrasiyasında baş verir. Propanolun daha çox sayda hidrofob qrupları isə hidrosil qrupunun dağıdıcı təsirini üstələdiyindən fazalara ayrılma komponentlərin daha kiçik konsentrasiyalarında baş verir.

Doğrudan da, alınan nəticələrdən görüldüyü kimi, temperaturun və əlavələrin təsiri ilə binodalların bəziləri homogen oblast, digərləri isə heterogen oblast istiqamətində sürüşürlər.

Əgər binodal koordinat başlanğıcından uzaqlaşırsa, yəni homogen oblast böyüyürsə, deməli, əlavə olunan maddə komponentlərin suya hərisliklərinin

fərqini azaldır, sistemdə suyun strukturunu dağıdır və fazalara ayrılma çətinləşir və fazaəmələgətirən komponentlərin konsentrasiyalarının daha böyük qiymətlərində baş verir və əksinə.

Şəkildən və cədvəldən görüldüyü kimi  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{NaNO}_3$  və  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  duzlarının ikifazlı sistemə əlavə edilməsi nəticəsində binodalların heterogen oblastlarının sahələrinin daha böyük olmasına, fazaəmələgətirən polimerlərin fazaların su mühitlərinə olan hərissliklərinin fərqinin artmasına və nəticə olaraq sistemin ayırılma qabiliyyətinin böyüməsinə gətirib çıxarır.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Альбертсон П.О. Разделения клеточных частиц и макромолекул. М: Мир, 1974, 392 с.
2. Roberd A., Patterson D. *Macromolecules*, 1977, N 10, p.1021-1025.
3. Patterson D., *Macromolecules*, 1977, N 10, p.708-710
4. Махмудов А.У. докторская диссертация, 1989, Баку.
5. Заславский Б.Ю., Масимов Э.А., Михеева Л.М., Рогожин С.В. Способ оценки относительная гидрофобности водных растворов полимеров.
6. Zaslavsky B.Yu., Miheeva L.M., Mestechkina N.M. – *Y.Chromatogr.*, 1983, v.256, N1, p.49-59.
7. Məsimov E., Bağırov T., Həsənova X.T. PEQ-qeyri-üzvi elektrolit sistemlərinin hal diaqramlarının termodinamik analizi // Bakı Universitetinin xəbərləri, 2004 №3, s. 97-102.
8. Məsimov E., Bağırov T. İkifazlı su-polimer sistemlərində paylanma metodu vasitəsilə makromolekulların nisbi hidrofobluqlarının tədqiqi. // AMEA-nın Xəbərləri, fizika-riyaziyyat və texnika elmləri seriyası, fizika və astronomiya, 2006, XXVI cild №5, s.132-140.
9. Масимов Э., Аббасов Х., Багиров Т., Гасанова Х., Гурбанов Дж.Т. Структурные особенности двухфазной системы полиэтиленгликоль-  $\text{C}_4\text{O}_6\text{H}_4\text{Na}_2\text{-H}_2\text{O}$  // Журнал Физика Институт Физики НАН Азербайджана, 2007, т/ 13, № 1-2, с.334-336.

#### ВЛИЯНИЕ НИЗКОМОЛЕКУЛЯРНЫХ ВЕЩЕСТВ НА РАЗДЕЛИТЕЛЬНУЮ СПОСОБНОСТЬ ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ ПЭГ – НАТРИЕВАЯ СОЛЬ ЛИМОННОЙ КИСЛОТЫ – ВОДА

Э.А.МАСИМОВ, Г.М.ШАХБАЗОВА, С.Й.ОДЖАГВЕРДИЕВА

#### РЕЗЮМЕ

В представленной работе были исследованы фазовые диаграммы водно-полимерной двухфазной системы ПЭГ – натриевая соль лимонной кислоты – вода в присутствии некоторых добавок (солей, спиртов) и температуры. Было показано, что влияние добавок проявляется в смещении бинаодальных кривых, т.е. в изменении соотношения площадей гетерогенных и гомогенных областей фазовой диаграммы. Определены влияние добавок на разделительную способность двухфазной системы ПЭГ – натриевая соль лимонной кислоты – вода. Анализ приведенных данных показывает, что изменение параметров фазовой диаграмм и различные значения разделительной способности  $n^*$  двухфазной системы в зависимости от природы добавок связано изменением структуры воды под влиянием указанных факторов и в соответствии с этим изменением взаимодействия фазообразующих компонентов двухфазной системы с

водой, обуславливающие различия физико-химических свойств, в частности относительных гидрофобностей двухфазной системы.

**Ключевые слова:** двухфазные системы, полиэтиленгликоль, Na-соль лимонной кислоты, способность дифференцироваться.

**THE INFLUENCE OF LOW MOLECULAR WEIGHT SUBSTANCES  
TO THE SEPERATION ABİLİTY OF THE AQUEOUS TWO-PHASE SYSTEM  
PEG — SODIUM SALT OF CITRIC ACID — WATER**

**E.A.MASIMOV, G.M.SHAHBAZOVA, S.Y.OJAGVERDIEVA**

**SUMMARY**

In this work, we studied the phase diagrams of the aqueous two-phase system PEG — sodium salt of citric acid — water in the presence of some additives (salts, alcohols) and temperature. It was shown that the effect of additives is manifested in the mixing of binodal curves, i.e. in changing the ratio of areas of heterogeneous and homogeneous regions of the phase diagram. The effect of additives on the separation ability of a two-phase system is determined. An analysis of the data presented shows that a change in the parameters of the phase diagram and different values of the separation ability  $n^*$  of the two-phase system depending on the nature of the additives is due to a change in the structure of water under the influence of these factors and in accordance with this change in the interaction of the phase-forming components of the two-phase system with water, which cause differences in the physical chemical properties, in particular the relative hydrophobicity of a two-phase system.

**Keywords:** biphasic systems, polyethyln glycol, Na salt of citric acid, ability to differentiate

*Redaksuyaya daxil oldu: 18.09.2019-cu il*

*Çapa imzalandı: 28.12.2019-cu il*

UOT 539.12

## POZİTRONUN KANALLAŞMA ŞÜALANMASI

M.R.RƏCƏBOV

Bakı Dövlət Universiteti

m\_rajabov@mail.ru

*Sürətləndiricilər texnikasının təkmilləşdirilməsi və inkişafı yüksək enerjili zərrəciklərin maddə ilə qarşılıqlı təsirinin həm nəzəri, həm də təcrübi tədqiqinə təkan verir. İşdə kanallaşmış zərrəciklərin təsiri ilə qamma –kvantların şüalanması nəzəri tədqiq edilir.*

**Açar sözlər:** kanallaşma, pozitron, şüalanma

Yüklü zərrəciklərin maddə ilə qarşılıqlı təsiri həm nəzəriyyəçi fiziklərin, həm də bu sahədə çalışan eksperimentatorlar üçün maraq kəsb edir. Yüklü zərrəciklərin və ya qamma-kvantların maddədən keçərkən yaranan sırf elektromaqnit proseslərin öyrənilməsi son zamanlar geniş vüsət almışdır. Belə proseslərə misal olaraq: yüksək enerjili elektronların elastiki səpilməsi, tormozlanma şüalanması, lepton-antilepton cütünün fotodoğulması, tərs tormozlanma şüalanması, Cerenkov şüalanması, yüklü zərrəciklərin kanallaşması, keçid şüalanması və s. göstərmək olar.

Son zamanlar elektronların və ya pozitronların monokristallarda kanallaşma rejimində hərəkət zamanı yaranan şüalanmanın öyrənilməsi böyük maraq kəsb edir.

Kanallaşma effektində yüklü zərrəcik atom müstəviləri və ya atom zəncirləri arasında bir növ “kanala” salınmış olur (müstəvi kanallaşma və ya ox kanallaşması). Sübut olunur ki, yüklü zərrəciyin kristallik müstəvilərlə və ya kristallik oxla əmələ gətirdiyi bucaq Lindxard bucağından ( $\theta_c$ ) kiçikdirsə, kanallaşma müşahidə olunur. Lindxard bucağı aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$\theta_c = (2\pi Ze^2 / \chi a^2 E)^{1/2}$$

$\chi = me^2 Z^{1/3}$ -ekranlaşmanın tərs radiusu, a-monokristalın qəfəs sabiti, Z-atom nömrəsidir. Silisium kristalı halında  $E=1$  QeV olduqda  $\theta_c = 10^{-4}$  rad bərabər olur.

Bu zaman zərrəcik kifayət qədər böyük zaman intervalında kristallik müstəvilərin və ya kristallik oxların əmələ gətirdiyi kanallar boyunca hərəkət edir və bu halda kristalda zərrəciyin qarşılıqlı təsirinin potensial enerjisi minimum olur. Nəticədə zərrəciyin hərəkəti finit oblastda baş verir. Kvant fizikası nöqtəyi nəzə-



rindən hərəkət finitdirsə, diskret enerji səviyyələri yaranır. Kanallaşma rejimində hərəkət edən zərrəciyin enerjisi artdıqca, zərrəciyin hərəkəti klassik mexanika ilə daha yaxşı təsvir olunur. Kanallaşma rejimində hərəkət edən ultrarelyativistik elektronun atom müstəviləri və ya atom zəncirləri tərəfindən trayektoriyası əyildiyindən şüalandırır. Bilirik ki, yüklü zərrəciyin istənilən əyrixətli hərəkəti təcilli hərəkət olduğundan belə zərrəcik şüalandırılmalıdır.

Kristallik oxa çox kiçik bucaq altında düşən yüklü zərrəcik bu oxda yerləşən müxtəlif atomlardan koherent səpilir. Bu zaman kristalda olan bütün atomların yaratdığı tam potensialı çox böyük dəqiqliklə kristal ox boyunca düzölmüş atomların yaratdığı potensial ilə əvəz etmək olar. Bu cür daxil edilmiş potensial yalnız oxdan olan məsafədən asılı olacaq və kanallaşma rejimində zərrəciyin hərəkətinin öyrənilməsi sadələşəcək. Biz Lindxard potensialı sahədə zərrəciyin hərəkətinə baxacağıq.

$$V(x) = 2\pi Z_1 Z_2 e^2 N d_p [(x^2 + C^2 a^2)^{1/2} - x] \quad (1.1)$$

Burada  $y$ - müstəvidən olan məsafə,  $d_p$ -kanalın eni,  $N$ -atomların konsentrasiyasıdır.

$Z_1 e$  və  $Z_2 e$ -uyğun olaraq zərrəciyin və atom hədəfinin yükü,  $C = \sqrt{3}$ , a-Tomas-Fermi modelində ekranlaşma parametridir. Kanallaşma üçün potensial enerjinin ifadəsi kifayət qədər mürəkkəbdir. Kanal zərrəciklərinin şüalanma spektrinin analitik ifadəsini tapmaq üçün potensialın bu ifadəsi çətinlik yaradır. Bir çox hallarda bu ifadəni böyük dəqiqliklə daha sadə ifadələrə aproksimasiya etmək olur. Məsələn, pozitronların müstəvi kanallaşmasında potensialı birinci yaxınlaşmada parabola şəklində seçmək olar.

$$V(x) = \frac{4V_0 x^2}{d^2} \quad (1.2)$$

(1.2) potensialına anharmonik düzəlişlər çox cüzi əlavə verir və bu əlavələri həyəcanlanma nəzəriyyəsinin köməyi ilə nəzərə ala bilərik. Elektronlar üçün potensialın ifadəsi böyük dəqiqliklə aşağıdakı kimi seçilə bilər.

$$V(x) = -V_0 c h^{-2} \frac{x}{d} \quad (1.3)$$

$V_0$  və  $d$  parametrləri modelə uyğun seçilir. Məsələn, Si kristalı üçün  $V_0 = 13,1$  eV,  $d = 0,245 \text{ \AA}$  seçilir.

Ümumi halda kanallaşmış zərrəciklərin hərəkətinə kvant mexanikası metodlarını tətbiq etməklə baxılmalıdır, çünki zərrəciyin eninə hərəkətinin de-Broyl dalğasının uzunluğu eninə hərəkət oblastının xarakteristik ölçüləri ilə eyni tərtibdədir. Lakin çox böyük enerjilərdə zərrəciyin hərəkətini klassik fizika qanunları ilə təsvir etmək olar. Ona görə biz zərrəciyin hərəkətini əvvəlcə klassik fizika qanunları ilə öyrənəcəyik.

$Z$  oxunu pozitronun sürütünün uzununa komponenti istiqamətində yönəldək. Parabolik potensialı sahədə pozitronun hərəkət tənliyi aşağıdakı kimi olur:

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1-(v_x^2+v_z^2)}} = -\frac{8V_0x}{d^2} \quad (1.3)$$

Kanallaşma rejimində hərəkət zamanı  $v_x \ll v_z$ . Ona görə də məxrəcdəki  $v_x$  komponentini nəzərə almaya bilərik.  $v_x = \frac{dx}{dt}$  olduğunu nəzərə alsaq, onda (1.3) tənliyi aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\frac{m}{\sqrt{1-v_z^2}} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{8V_0x}{d^2}$$

Aşağıdakı əvəzləmələrlə bu tənliyin şəklini sadələşdirək.

$$\omega^2 = \frac{8V_0}{md^2} \sqrt{1-v_z^2}. \text{ Onda tənliyimiz}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (1.4)$$

şəklinə düşər. Bu tənliyin həllini

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (1.5)$$

şəklində axtaraq.  $\lambda_1, \lambda_2$  (1.4) tənliyinə uyğun xarakteristik tənliyin kökləridir.

Xarakteristik tənlik  $\lambda^2 + \omega^2 = 0$  şəklində olur. Buradan  $\lambda_1, \lambda_2$ -ni tapırıq.

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

$\lambda$ -nın bu qiymətlərini (1.5) –də yerinə qoyaq.

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (1.6)$$

Eyler düsturlarını tətbiq etməklə (1.6) ifadəsini

$$x(t) = x_m \cos \omega t \quad (1.7)$$

şəklində yazı bilərik. Burada  $x_m$  -başlanğıc amplituddur. Qeyd etdik ki, zərrəcik atom müstəvisinin potensialının təsiri ilə trayektoriyasını əyir. Bu zaman zərrəcik şüalandırır. Bu şüalanmanın intensivliyini (gücünü) tapaq.

İxtiyari hərəkət edən relyativistik zərrəciyin vahid gecikmə zamanında şüalanma intensivliyinin sıxlığı üçün məlum ifadədən istifadə edək:

$$I_{\text{six}}(t') = \frac{dI(t')}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{[\vec{n}[\vec{n} - \vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}}]]^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^5}. \quad (1.8)$$

Bu düstur  $\vec{n}, \vec{\beta}$  və  $\dot{\vec{\beta}}$  vektorlarının ixtiyari yönəldiyi halda şüalanma intensivliyinin bucaqlara görə tam paylanmasını təsvir edir.

Yuxarıdakı düsturda ikiqat vektor hasilini açaraq, onu aşağıdakı şəkildə yazı bilərik:

$$I_{\text{six}}(t') = \frac{e^2}{4\pi c(1 - \vec{\beta}\vec{n})^5} \times \{ (1 - \vec{\beta}\vec{n})^2 \dot{\vec{\beta}}^2 + 2(\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}})(\vec{n}\dot{\vec{\beta}})(1 - \vec{\beta}\vec{n}) - (1 - \beta^2)(\vec{n}\dot{\vec{\beta}})^2 \}. \quad (1.9)$$

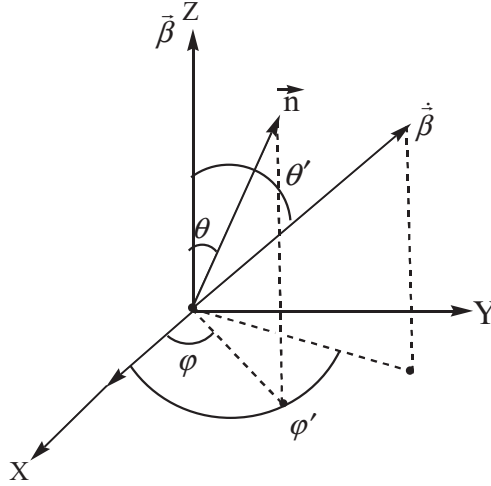
Bucaqlara görə asılılığı tədqiq etmək üçün  $\vec{\beta}$  vektoru polyar oxu boyunca yönəlmiş sferik koordinat sistemindən istifadə etmək daha əlverişlidir (şəkil 1).

Vektorların yuxarıda iştirak edən skalyar hasilərini acıq yazaq:

$$\vec{\beta}\vec{n} = \beta \cos \theta, \quad \vec{\beta}\dot{\vec{\beta}} = \beta \dot{\beta} \cos \theta', \quad \vec{n}\dot{\vec{\beta}} = \dot{\beta} (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'))$$

İndi diferensial intensivliyin bucaqlardan aşkar asılılığı aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$dI(t') = I_{\text{six}}(t') d\Omega = \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c} \left\{ \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} + 2\beta \cos \theta' \frac{\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')}{(1 - \beta \cos \theta)^4} - \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta \cos \theta)^5} [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')]^2 \right\} d\Omega. \quad (1.10)$$



Şəkil 1.

Yuxarıda fiqurlu mötərizədəki adsız funksiyanı  $f(\theta, \theta', \varphi, \varphi')$  ilə işarə edərək (1.10) düsturunu aşağıdakı şəkildə yazırıq:

$$dI(t') = \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c} f(\theta, \theta', \varphi, \varphi') d\Omega. \quad (1.10')$$

$f(\theta, \theta', \varphi, \varphi')$  funksiyası şüalanmanın bucaqlara görə tam paylanması təsvir edir.

Əgər  $f$ -ə sferik koordinat kimi baxsaq, onda  $f(\theta, \theta', \varphi, \varphi')$  asılılığı verilmiş koordinat sistemində həndəsi olaraq hər hansı səthi təsvir edəcəkdir. Bu səthə *şüalanmanın indikatrixası* deyilir.

Ümumi  $f(\theta, \theta', \varphi, \varphi')$  funksiyasında xüsusi hallara keçsək, yəni 1)  $\theta' = 0, \varphi' = 0$  və 2)  $\theta' = \frac{\pi}{2}, \varphi' = 0$  yazsaq, biz boyuna (uzununa) sürətlənmiş və eninə sürətlənmiş elektronun şüalanma intensivliyinin bucaqlara görə paylanma düsturlarını alarıq:

$$f_{11} = \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}, \quad f_{\perp} = \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[ 1 - \frac{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \right]. \quad (1.11)$$

İndi bu xüsusi hallarla məşğul olmayaraq istənilən sürət və təcilə malik elektronun ümumi halda şüalanmasının inteqral intensivliyini hesablayacağıq. (1.10) düsturunda əvvəlcə  $\varphi$ -yə görə inteqrallama apararaq ifadəni sadələşdiririk. Məlumdur ki,

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi - \varphi') d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi - \varphi') d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 + \cos 2(\varphi - \varphi')] d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi.$$

Bu əməliyyatı (1.10) düsturunda aparsaq, aşağıdakı ifadəni alarıq:

$$I(t') = \frac{e^2 \beta^2}{2c} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \left\{ \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} + \frac{2\beta \cos^2 \theta' \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^4} - \frac{(1 - \beta^2)}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \left[ \cos^2 \theta' \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta' \sin^2 \theta \right] \right\}. \quad (1.12)$$

Burada aşağıdakı sadə inteqrallar iştirak edir:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^m}, \quad m = 3, 4, 5. \quad (1.13)$$

Bu inteqralları ən sadə üsulla açsaq

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^m} &= \int_0^{\pi} \frac{-d \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^m} = \frac{1}{\beta} \int \frac{d(1 - \beta \cos \theta)}{(1 - \beta \cos \theta)^m} = \\ &= \frac{-1}{\beta(m-1)} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^{m-1}} \Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{1}{\beta(m-1)} \left( \frac{1}{(1 - \beta)^{m-1}} - \frac{1}{(1 + \beta)^{m-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{\beta(m-1)} \cdot \frac{(1 + \beta)^{m-1} - (1 - \beta)^{m-1}}{(1 - \beta^2)^{m-1}} \end{aligned} \quad (1.14)$$

alarıq. Bu ifadələri (1.12) düsturunda nəzərə alırıq. Məlumat üçün (1.12) düsturunda iştirak edən 4 ədəd toplananın inteqralının ifadəsini veririk.

$$i_1 = \frac{2}{(1 - \beta^2)^2}, \quad i_2 = \frac{16\beta^2 \cos^2 \theta'}{3(1 - \beta^2)^3}, \quad i_3 = -\frac{2 \cos^2 \theta'}{3(1 - \beta^2)^3} (1 + 5\beta^2), \quad i_4 = -\frac{2 \sin^2 \theta'}{3(1 - \beta^2)^2}.$$

Bunları toplayaraq sadələşdirsək relyativistik zərrəciyin şüalanmasının inteqral intensivliyi üçün çox sadə düstur alarıq:

$$I(t') = \frac{e^2 \beta^2}{2c} (i_1 + i_2 + i_3 + i_4) = \frac{2e^2 \beta^2}{3c(1 - \beta^2)^3} (1 - \beta^2 \sin^2 \theta'). \quad (1.15)$$

Bu relyativistik nöqtəvi yükün vahid gecikmə zamanında şüalandırdığı inteqral intensivliyin ən ümumi düsturudur. Burada zərrəciyin təcili onun sürətilə istənilən  $\theta'$  bucağı əmələ gətirir. Bu düstur çox böyük tətbiq edilmə oblastına malikdir. Onu maqnit sahəsində dairəvi hərəkət edən elektronların sinxrotron şüalanmasına, elektronların nüvə sahəsində tormozlanma şüalanmasına və digər şüalanmalara tətbiq etmək olar. Burada klassik dəqiq ifadə almaq üçün elektronun təcilinin zamandan nə şəkildə asılı olmasını bilməliyik. (1.15) düsturunda  $\theta'$  bucağına müxtəlif qiymətlər, məsələn,  $\theta' = 0^0; \frac{\pi}{2}$  və s. verməklə digər müəlliflərin aldığı nəticələri xüsusi hal kimi ala bilərik.

Bizim düsturumuzda  $\theta' = \frac{\pi}{2}$  yazaraq, maqnit sahəsində hər hansı R radiuslu çevrə boyunca hərəkət edən relyativistik elektronun sinxrotron şüalanmasının tam inteqral intensivliyini ala bilərik. Doğrudan da  $\beta = \frac{1}{c} \frac{v^2}{R}$  və  $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$  olduğunu nəzərə alsaq və elektronun relyativistik  $\frac{E}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  enerjisindən istifadə etsək (1.15) düsturu aşağıdakı şəkllə düşər:

$$I(t') = \frac{2e^2 c \beta^4}{3(1-\beta^2)^2 R^2} = \frac{2e^2 c \beta^4}{3R^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4. \quad (1.16)$$

Bu düstur relyativistik elektronun sinxrotron şüalanması enerjisinin tam ifadəsidir.

Burada R- əyrilik radiusu, E-zərrəciyin enerjisidir. Zərrəcik əyrixətli trayektoriya boyunca hərəkət etdiyi zaman yaranan mərkəzəqaçma təcili

$a = \frac{v^2}{R}$  ifadəsi ilə təyin olunur. Bu zaman ani əyrilik radiusu aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$R = \frac{v^2}{a} \quad (1.17)$$

$a = \frac{dv_{\perp}}{dt} = \dot{v}_{\perp}$  olduğunu nəzərə alsaq, burada  $\dot{v}_{\perp}$ -eninə sürətin dəyişməsidir. onda (1.17) ifadəsi

$$R = \frac{v^2}{\dot{v}_{\perp}} \quad (1.18)$$

kimi yazıla bilər. Bizim halda  $\dot{v}_{\perp} = -\omega^2 x_m^2 \cos \omega t$ . Bunu (1.18)-də, (1.18) ifadəsini (1.16)-da nəzərə alsaq,

$$I = \frac{2e^2 c \beta^4}{3 \cdot 2 \cdot v^4} \omega^4 x_m^2 \gamma^4 \quad (1.19)$$

alarıq. Burada  $\frac{E}{mc^2} = \gamma$ ,  $\cos^2 \omega t = 1/2$  olduğu nəzərə alınmışdır.  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  -

Lorens faktor,  $\beta = \frac{v}{c}$ . Bunları (1.19) –da nəzərə alsaq, müstəvi kanallaşma rejimində hərəkət pozitronun şüalanmasının intensivliyi üçün aşağıdakı ifadəni almış olarıq:

$$I = \frac{e^2 \omega^4 x_m^2 \gamma^4}{3c^3} \quad (1.10)$$

Göründüyü kimi şüalanmanın intensivliyi tezliyin dördüncü dərəcəsi ilə mütənasibdir.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Наджафов И.М., Касимова А.М. Интенсивности излучения произвольно движущегося релятивистического электрона. Баки Университетinin Xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2010, №3, s.97
2. Кумахов М.А. Теория излучения заряженных частиц в кристалле при каналировании. // Журн.эксперим.и теор.физ., 1977, т.72, №4, с.1489-1502.
3. Nəcəfov İ.M. Müasir klassik elektrodinamika. Bakı: Adiloğlu, 2012, 534 s.

#### ИЗЛУЧЕНИЕ ПОЗИТРОНОВ ПРИ КАНАЛИРОВАНИИ В КРИСТАЛЛЕ

**М.Р.РАДЖАБОВ**

#### РЕЗЮМЕ

Совершенствование и развитие ускорительной техники стимулируют как теоретические, так и экспериментальные исследования взаимодействия частиц высоких энергий с веществом. В работе теоретически исследуется излучение под воздействием каналированных частиц.

**Ключевые слова:** каналирование, позитрон, излучение

#### RADIATION OF POSITRONS CHANNЕLED IN A CRYSTAL

**M.R.RAJABOV**

#### SUMMARY

It is known that the development and improvement of accelerator technology, and the production of high energy beams stimulate further theoretical and experimental investigations of fast particles interaction with matter. In this article, the process of radiation of gamma quanta by channeled particles has been studied.

**Key words:** channeling, positron, radiation.

*Redaksiyaya daxil oldu: 09.09.2019-cu il*  
*Çapa imzalandı: 28.12.2019-cu il*

UOT 541.8, 539.199

**SU-PEQ-KI SİSTEMLƏRİNİN ÖZLÜ AXININ  
AKTİVLƏŞMƏ PARAMETRLƏRİ VƏ  
MƏHLULDA PEQ-in PARSİAL MOLYAR HƏCMİ****B.G.PAŞAYEV***Bakı Dövlət Universiteti*  
*p.g.bakhtiyar@gmail.com*

*İşdə su-PEQ-KI sistemlərinin 293.15-323.15 K temperatur və PEQ-in 0-0,001 molyar hissə konsentrasiyası intervalında dinamik özlüklüyü və sıxlığı ölçülmüşdür. PEQ-in 1000, 1500, 3000, 4000 və 6000 molekulyar kütləli fraksiyalarına baxılmışdır və KI-in konsentrasiyası 0.01 molyar hissə götürülmüşdür. Təcrübi nəticələrdən istifadə edərək tədqiq olunan sistemlərin baxılan temperatur və konsentrasiya intervalında özlü axınının aktivləşmə parametrləri və məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmələri hesablanmışdır. Müəyyən olunmuşdur ki, həm konsentrasiyanın artması ilə, həm də molekulyar kütlənin artması ilə məhlul daha strukturlaşmış hala keçir.*

**PACS:** 61.20.Ne, 66.20.+d, 82.60.Lf, 61.25.Hq.**Açar sözlər:** sulu məhlul, PEQ, KI, özlü axınının aktivləşmə parametrləri, parsial molyar həcm

Polietilenqlikol (PEQ) bir çox sənaye sahələrində (farmakologiyada, kasmetologiyada, biotexnologiyada, qida sənayesində və s.) geniş istifadə olunduğundan, ən çox öyrənilən polimerlərdəndir [1-6]. PEQ-in geniş istifadə imkanlarının olmasına bir səbəb də onun çoxlu molekulyar kütləli fraksiyalarının olmasıdır. PEQ orqanizmin immun sisteminə mənfi təsir göstərmir, toksik xüsusiyyətlərə malik deyil və bədəndən sürətlə təmizlənir [3]. PEQ-in böyük molekulyar kütləli fraksiyaları istiliyə davamlıdır və atmosfer nəminə yaxşı müqavimət göstərir. PEQ-in bütün molekulyar kütləli fraksiyaları suda yaxşı həll olur. Hesab edilir ki, buna səbəb PEQ makromolekulunda olan ( $OH$ ) qruplarının,  $-O-$  və  $-H$  atomlarının su molekulu ilə hidrogen rabitəsi yarada bilməsidir. PEQ makromolekulunda olan  $CH_2$  qrupları isə hidrofob effekti yaradırlar [1, 5]. PEQ-in əksər funksiyaları əsasən su mühitində baş verir. Bu səbəbdən su-PEQ sistemlərində struktur xüsusiyyətlərinin öyrənilməsi və üçüncü komponentin daxil edilməsi ilə məhlulda yaranan struktur dəyişikliklərinin öyrənilməsi həm elmi, həm də praktiki cəhətdən böyük əhəmiyyətə malikdir.

İşdə su-PEQ-KI sistemlərinin 293.15-323.15 K temperatur və PEQ-in 0-

0.001 molyar hissə konsentrasiyası intervalında struktur xüsusiyyətləri viskozimetriya və piknometriya metodları ilə tədqiq olunmuşdur. Baxılan temperatur və konsentrasiya intervalında sulu məhlulların dinamik özlülüyü və sıxlığı ölçülmüşdür. Təcrübi nəticələrdən istifadə edərək tədqiq olunan sistemlərin özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisinin ( $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$ ), özlü axınının aktivləşmə entalpiyasının ( $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ ), özlü axınının aktivləşmə entropiyasının ( $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ ) və məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmnin ( $\tilde{V}$ ) PEQ-in konsentrasiyasından asılılıqları təhlil olunmuşdur.

### Təcrübi və nəzəri hissə

*Tədqiqat obyektı və metodları.* Tədqiqat obyektı olaraq su-PEQ-*KI* sistemləri götürülmüşdür. PEQ-in 1000, 1500, 3000, 4000 və 6000 molekulyar kütləli fraksiyalarına baxılmışdır və *KI*-in konsentrasiyası 0.01 molyar hissə götürülmüşdür. İstifadə olunmuş PEQ-lər və *KI* kimyəvi safdırlar. Məhlulların hazırlanmasında bidistillə edilmiş sudan istifadə olunmuşdur. İşdə özlülük kapilyar viskozimetrlə, sıxlıq isə piknometrlə ölçülmüşdür.

Mayələrin özlü axınının Eyrinq nəzəriyyəsinə [5, 7, 8] görə özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisi ( $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$ )

$$\Delta G_{\eta}^{\ddagger} = RT \ln \frac{\eta}{\eta_0} \quad (1)$$

ifadəsilə təyin olunur. Eyrinq nəzəriyyəsinə [5, 7] görə  $\eta_0 = N_A h \rho / M$  olur. Burada  $R$  -universal qaz sabiti,  $N_A$  -Avoqadro ədədi,  $h$  -Plank sabitidir.  $M$  -məhlulun molyar kütləsi olub,  $M = \sum_{i=1}^N x_i M_i$  ifadəsilə təyin olunur [5].  $x_i$  və  $M_i$

uyğun olaraq  $i$ -ci komponentin molyar hissəsi və molyar kütləsidir.  $T$  mütləq temperaturunda mayenin dinamik özlülüyü ( $\eta$ ) və sıxlığı ( $\rho$ ) təcrübədə təyin olunur.

Özlü axınının aktivləşmə entalpiyasını ( $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ )

$$\Delta H_{\eta}^{\ddagger} = R \frac{\partial \ln(\eta / \eta_0)}{\partial (1/T)} \quad (2)$$

ifadəsilə təyin edə bilərik [5]. (1) ifadəsindən  $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$  və (2) ifadəsindən  $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$  təyin edildikdən sonra

$$\Delta G_{\eta}^{\ddagger} = \Delta H_{\eta}^{\ddagger} - T \Delta S_{\eta}^{\ddagger} \quad (3)$$

ifadəsinə [5] əsasən özlü axınının aktivləşmə entropiyasını ( $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ ) təyin edə bilərik.

Məhlulda həllolan maddənin (PEQ-in) parsial molyar həcmi ( $\tilde{V}$ )

$$\tilde{V} = V_m + (1-x) \left( \frac{\partial V_m}{\partial x} \right)_{p,T} \quad (4)$$



düsturu ilə təyin olunur [5, 9, 10]. Burada  $V_m$ -məhlulun molyar həcmi olub,

$$V_m = \frac{M}{\rho} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^N x_i M_i \text{ düsturu ilə hesablanır.}$$

### Alınmış nəticələrin müzakirəsi

Müxtəlif molyar kütləli PEQ-lər üçün su-PEQ-KI sistemlərinin 293,15 K temperaturda özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisinin ( $\Delta G_\eta^\ddagger$ ) və özlü axınının aktivləşmə entalpiyasının ( $\Delta H_\eta^\ddagger$ ) PEQ-in konsentrasiyasından ( $x$ ) asılılıqları cədvəl 1 və cədvəl 2-də, özlü axınının aktivləşmə entropiyasının ( $\Delta S_\eta^\ddagger$ ) PEQ-in konsentrasiyasından ( $x$ ) asılılığı isə şəkil 1-də göstərilmişdir.

Cədvəl 1, cədvəl 2 və şəkil 1-dən görünür ki,  $\Delta G_\eta^\ddagger$ ,  $\Delta H_\eta^\ddagger$  və  $\Delta S_\eta^\ddagger$  parametrləri verilmiş temperaturda konsentrasiyanın artması ilə artır, verilmiş temperatur və konsentrasiyada isə molyar kütlənin artması ilə artır.

Cədvəl 1

Su-PEQ-KI sistemlərinin özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisinin ( $\Delta G_\eta^\ddagger, C/mol$ )

PEQ-in konsentrasiyasından ( $x$ ) asılılığı ( $x_{KI} = 0.01, T = 293.15K$ )

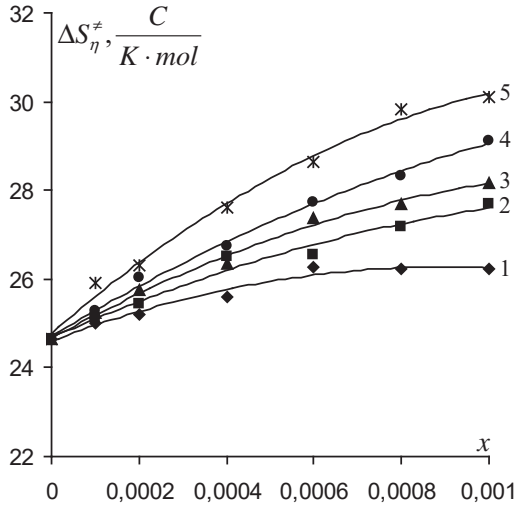
$x$	$M_{PEQ} = 1000$	$M_{PEQ} = 1500$	$M_{PEQ} = 3000$	$M_{PEQ} = 4000$	$M_{PEQ} = 6000$
<b>0</b>	9180	9180	9180	9180	9180
<b>0.0001</b>	9258	9352	9455	9611	10459
<b>0.0002</b>	9343	9550	9768	10079	11618
<b>0.0004</b>	9506	9939	10563	11124	12994
<b>0.0006</b>	9583	10437	10946	11502	14527
<b>0.0008</b>	9864	10623	11291	12410	16150
<b>0.001</b>	9975	11096	12015	13047	16899

Cədvəl 2

Su-PEQ-KI sistemlərinin özlü axınının aktivləşmə entalpiyasının ( $\Delta H_\eta^\ddagger, C/mol$ )

PEQ-in konsentrasiyasından ( $x$ ) asılılığı ( $x_{KI} = 0.01, T = 293.15K$ )

$x$	$M_{PEQ} = 1000$	$M_{PEQ} = 1500$	$M_{PEQ} = 3000$	$M_{PEQ} = 4000$	$M_{PEQ} = 6000$
<b>0</b>	16400	16400	16400	16400	16400
<b>0.0001</b>	16586	16712	16849	17026	18050
<b>0.0002</b>	16734	17010	17314	17707	19326
<b>0.0004</b>	17015	17709	18286	18969	21089
<b>0.0006</b>	17288	18216	18974	19632	22926
<b>0.0008</b>	17549	18590	19414	20715	24896
<b>0.001</b>	17663	19212	20272	21585	25721



**Şək. 1.** Su-PEQ-KI sistemlərində özlü axının aktivləşmə entropiyasının PEQ-in konsentrasiyasından asılılığı ( $x_{KI} = 0.01$ ,  $T = 293.15K$ ).

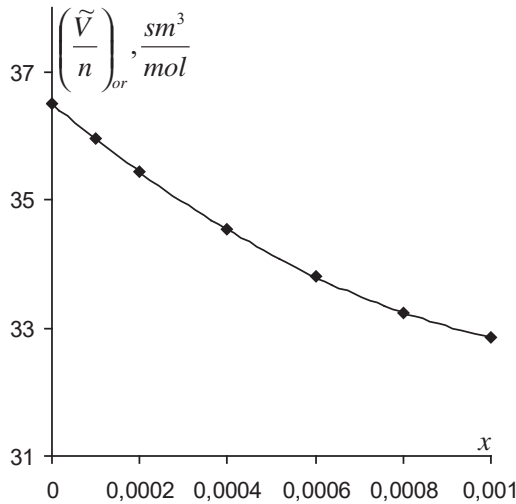
1-PEQ (1000), 2-PEQ (1500), 3-PEQ (3000), 4-PEQ (4000), 5-PEQ (6000)

Qeyd edək ki,  $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$  1 mol sayda molekulun bağlı haldan aktiv hala keçməsinə sərf olunan enerjidir,  $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$  məhlulda yaranan dəyişmələri enerji baxımından,  $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$  isə struktur baxımından xarakterizə edir. Belə ki, konsentrasiyanın artması ilə  $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$ -nin artması molekulun potensial çəpəri keçməsinə daha çox enerji sərf olunmasını,  $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ -in artması sistemin daha möhkəm struktura malik olmasını,  $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ -in artması isə sistemin daha strukturlaşmış hala keçməsinə göstərir [5, 11-13]. Özlü axının aktivləşmə parametrlərinin konsentrasiyadan asılılıqlarına (cədvəl 1, cədvəl 2 və şəkil 1) əsasən deyə bilərik ki, məhlulda PEQ-in konsentrasiyası artdıqca məhlul daha möhkəm struktura malik olur və daha da strukturlaşmış hala keçir.

Sulu məhlullarda struktur xüsusiyyətləri məhlulun komponentlərinin parsial molyar həcmələri ilə də xarakterizə olunur. Məlumdur ki,  $i$ -ci komponentin parsial molyar həcmi verilmiş tərkibli sistemə həmin komponentdən 1 mol əlavə etdikdə həcmnin dəyişməsinə bərabərdir [5, 9, 10]. Müxtəlif molyar kütləli PEQ-lər üçün su-PEQ-KI sistemlərində 293.15 K temperaturda PEQ-in parsial molyar həcmnin ( $\tilde{V}$ ) PEQ-in konsentrasiyasından ( $x$ ) asılılığı cədvəl 3-də göstərilmişdir.

**Su-PEQ-KI sistemlərində PEQ-in parsial molyar həcmnin ( $\tilde{V}$ ,  $sm^3/mol$ )  
PEQ-in konsentrasiyasından ( $x$ ) asılılığı ( $x_{KI} = 0.01$ ,  $T = 293.15K$ ).**

$x$	$M_{PEQ} = 1000$	$M_{PEQ} = 1500$	$M_{PEQ} = 3000$	$M_{PEQ} = 4000$	$M_{PEQ} = 6000$
<b>0</b>	804	1247	2558	3444	4799
<b>0.0001</b>	795	1224	2514	3376	4752
<b>0.0002</b>	787	1203	2474	3312	4711
<b>0.0004</b>	772	1164	2407	3198	4642
<b>0.0006</b>	760	1131	2357	3102	4592
<b>0.0008</b>	750	1104	2325	3023	4562
<b>0.001</b>	743	1082	2311	2962	4551



**Şəkil 2.** Su-PEQ-KBr sistemlərində PEQ-in bir monomerə düşən parsial molyar həcmnin orta qiymətinin PEQ-in konsentrasiyasından asılılığı ( $x_{KI} = 0.01$ ,  $T = 293.15K$ ).

Cədvəl 3-dən görünür ki, hər iki sistem üçün məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmi verilmiş temperaturda konsentrasiyanın artması ilə azalır, verilmiş temperatur və konsentrasiyada isə molyar kütlənin artması ilə artır. Hesablamalar göstərir ki, verilmiş temperatur və konsentrasiyada PEQ-in bir monomerə düşən parsial molyar həcmi  $\left(\frac{\tilde{V}}{n}\right)_{or}$  PEQ-in molyar kütləsindən, demək olar ki, asılı deyil. Şəkil 2-də tədqiq olunan müxtəlif molyar kütləli PEQ-lərin 293.15 K temperaturda bir monomerə düşən parsial molyar həcmnin orta qiymətinin konsentrasiyasından asılılığı göstərilmişdir. Bu asılılıqları

$$\left(\frac{\tilde{V}}{n}\right)_{or} = 2145252,6x^2 - 5795,6x + 36,5$$

ifadəsilə təsvir edə bilərik. Güman etmək olar ki, böyük ölçülü assosiatların fəzadakı həcm payı, bölündükdə onun ayrı-ayrı hissələrinin fəzadakı həcm payları cəmindən kiçik olur və əksinə. İki strukturlu su modelinə [14, 15] görə su hidrogen rabitəsilə birləşmiş müxtəlif ölçülü klasterlərdən və klasterlər arası sərbəst su molekullarından ibarətdir. Parsial molyar həcmə konsentrasiyadan asılılığına əsasən ehtimal etmək olar ki, PEQ molekulları ilk növbədə sərbəst su molekulları ilə hidrogen rabitəsi vasitəsilə birləşirlər. Bu isə konsentrasiyanın artması ilə məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmə azalmasına səbəb olur. Bu isə PEQ-in konsentrasiyasının artması ilə məhlulun daha da strukturlaşmasını göstərir.

Göründüyü kimi, həm özlü axının aktivləşmə entropiyasının, həm də məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmə konsentrasiyada asılılığı göstərir ki, verilmiş temperaturda həm götürülmüş fraksiyalı PEQ üçün konsentrasiyanın artması ilə, həm də götürülmüş konsentrasiyalı və müxtəlif fraksiyalı PEQ-lər üçün molekulyar kütlənin artması ilə məhlul daha strukturlaşmış hala keçir. Ehtimal etmək olar ki, tədqiq olunan sistemdə PEQ molekullarının ətrafında hidrogen rabitəsi vasitəsilə su molekullarının (ilk növbədə sərbəst su molekulları) toplanması nəticəsində müəyyən ölçülü aqreqatlar əmələ gəlir. PEQ-in həm konsentrasiyasının, həm də molekulyar kütləsinin artması ilə məhlulda belə aqreqatların sayı artır və ölçüləri böyüyür, nəticədə məhlul daha da strukturlaşmış hala keçir. Sözsüz ki, su-PEQ-KI sistemində  $K^+$  və  $I^-$  ionları hidratlaşmaya məruz qaldıqlarından yaranan struktur, su-PEQ sisteminin strukturundan fərqli olacaq.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Kashmola T.O., Estabraq S.K. Structure Rheology of Polyethylene Oxide Solution. *Iraqi Journal of Chemical and Petroleum Engineering*, 2014, Vol.15 №1, p. 23-32.
2. Bailey F.F., Koleske J.V. Poly(Ethylene Oxide). Academic press: New York, 1976. 173 p.
3. Sung J.H., Lee D.C., Park H.J. Conformational characteristics of poly (ethylene oxide) (PEO) in methanol. *Polymer*, 2007, Vol. 48, p.4205-4212.
4. Polik W.F., Burchard W. Static light scattering from aqueous Poly (ethylene oxide) solutions in the temperature range 20–90°C. *Macromolecules*, 1983, Vol. 16, p. 978–982.
5. Məsimov E.Ə., Həsənov H.Ş., Paşayev B.G. Mayələrin özlülüyü. Bakı: Ləman Nəşriyyat Poliqrafiya, 2016, 285 s.
6. Duval M. Monitoring of cluster formation and elimination in PEO solutions. *Macromolecules*, 2000, Vol. 33, p.7862–7867.
7. Глестон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 600 с.
8. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975, с.221-235.
9. Atkins P., De Paula J. *Physical chemistry*. Oxford University Press. 2006. 1067 p.
10. Белоусов В.П., Панов М.Ю. Термодинамика водных растворов неэлектролитов. Л.: Химия, 1983, 265 с.
11. Масимов Э.А., Гасанов Г.Ш., Пашаев Б.Г. Изменение структуры воды в водных растворах уксусной кислоты в зависимости от концентрации и температуры по данным денситометрии, вискозиметрии и ИК-спектроскопии. *Журнал физической химии*, 2013, том 87, №6, с. 969–972.
12. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш., Гасанов Н.Г. Изучение структуры воды в водных растворах KBr методами вискозиметрии и ИК-спектроскопии. *Журнал физической химии*, 2015, том 89, №7, с. 1133-1137

13. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш. Структура водных растворов сахарозы по данным вискозиметрии и ИК-спектроскопии. Журнал физической химии, 2017, том 91, №4, с. 644-647
14. Nemethy G. The structure of water and the thermodynamic properties of aqueous solutions. Istituto superiore di sanita-V.le Regina Elena, 299-Roma. Volume VI fascicolo speciale 1, 1970. p.492-592.
15. Məsimov E.Ə., Həsənov H.Ş.. Bioloji sistemlərin termodinamikası. Bakı: Ləman Nəşriyyat Poliqrafiya, 2007, 418 s.

## ПАРАМЕТРЫ АКТИВАЦИИ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЕ В СИСТЕМАХ ВОДА-ПЭГ-КИ И ПАРЦИАЛЬНЫЙ МОЛЯРНЫЙ ОБЪЕМ В РАСТВОРЕ ПЭГ

**Б.Г.ПАШАЕВ**

### РЕЗЮМЕ

В работе измерены динамическая вязкость и плотность систем вода-ПЭГ-КИ в интервале температур 293,15-323,15 К и 0-0,001 мольной доли ПЭГ. Рассмотрены фракции ПЭГ с молярной массой 1000, 1500, 3000, 4000, 6000 и концентрация КИ в системах вода-ПЭГ-КИ составляла 0,01 мольной доли. С использованием результатов эксперимента были вычислены активационные параметры вязкого течения и парциальные молярные объемы ПЭГ, а также исследованы зависимости этих параметров от концентрации ПЭГ в данном интервале температур и концентрации исследуемых систем. Установлено, что при увеличении концентрации как для фракции ПЭГ при данной температуре, так и при увеличении концентрации молекулярной массы для концентрированных и различных фракционных ПЭГ, раствор становится более структурированным.

**Ключевые слова:** водный раствор, ПЭГ, КИ, параметры активации вязкого течения, парциальный молярный объем.

## ACTIVATION PARAMETERS OF VISCOUS FLOW OF SYSTEMS WATER-PEG-KI AND PARTIAL MOLAR VOLUMES OF POLYETHYLENE GLYCOL IN SOLUTIONS

**B.G.PASHAYEV**

### SUMMARY

The dynamic viscosity and density of water-PEG-KI systems was measured at the range of temperature 293,15-323,15 K and a concentration of molar fraction of polyethylene glycol to 0-0.001. PEG molecules with a molecular weight of 1000, 1500, 3000, 4000, 6000 were investigated and the concentration of KI was taken 0,01 molar fraction. Using experimental results, the temperature and concentration at the range of investigated systems the activation parameters of the viscous flow and partial molar volumes of PEG in solutions were calculated. It was determined that when concentration and molecular weight increase, the solution becomes more structured.

**Key words:** aqueous solutions, PEG, KI, activation parameters of viscous flow, partial molar volume.

*Redaksiyaya daxil oldu: 18.07.2019-cu il*  
*Çapa imzalandı: 28.12.2019-cu il*

**BİOMOLEKULLARIN FƏZA QURULUŞUNUN TƏDQIQINDƏ  
İSTİFADƏ OLUNAN ÜSULLAR****L.İ.VƏLİYEVƏ, O.G.GÜLƏHMƏDOV***Bakı Dövlət Universiteti  
Lala\_Veliyeva@rambler.ru*

*İşdə biomolekulların fəza quruluşunun tədqiqində istifadə olunan təcrübi və nəzəri hesablama üsullarının bir sıra aspektləri nəzərdən keçirilmişdir.*

**Açar sözlər:** spektroskopik üsullar, quruluşun tədqiqi, konformasiya, nəzəri konformasiya analizi üsulu, molekulyar dinamika üsulu

Bioloji fəal molekullar dedikdə, zülal və kiçik peptid molekulları, onların təşkil olunduqları amin turşuları nəzərdə tutulur. Məlumdur ki, bu molekulların funksional aktivliklərindəki müxtəlifliklər onların fəza quruluşlarının müxtəlifliyi ilə birbaşa əlaqədardır. Bu da öz növbəsində biomolekulların birinci quruluşundan, yəni zülal və kiçik peptid molekullarının təşkil olunduğu amin turşuları ardıcılığından asılıdır.

Ümumiyyətlə, aminturşu qalıqlarından ibarət molekullar ətraf mühitə qarşı çox həssasdırlar. Buna görə də onlar fəzada bir konformasiya vəziyyətində olurlar və mühitin təsiri nəticəsində bir konformasiya halından digərinə asanlıqla keçirlər. Başqa sözlə desək, biomolekullar kiçikenerjili konformasiya halları toplusundan ibarət olur ki, bu kiçikenerjili konformasiya hallarının tapılması onların bioloji aktivliyinin spesifikliyinin izah edilməsi yolunda atılan əsas addımdır.

Biomolekullarının fəza quruluşları əsasən iki növ üsullarla - təcrübi və nəzəri üsullarla tədqiq olunur [3,4]. Biz öz hesablamalarımızda nəzəri hesablama üsullarına xüsusi yer veririk və onların biomolekulların tədqiqində rolunu yüksək qiymətləndiririk. Onu qeyd etmək lazımdır ki, təcrübi üsulların çoxunda alınan nəticələr ortalanmış, birqiymətli olmayan nəticələr verir. Çünki təcrübədə biomolekulun olduğu real mühiti yaratmaq həmişə mümkün olmur.

Bu baxımdan son illər nəzəri hesablama üsullarına daha çox üstünlük verilir.

## Təcrübi tədqiqat üsulları

Biomolekulların konformasiya hallarının mühitdə öyrənilməsi üçün istifadə edilən təcrübi üsullara aşağıdakıları misal göstərmək olar: infraqırmızı spektroskopiya (İQ), nüvə maqnit rezonansı üsulu (NMR), elektron paramaqnit rezonansı üsulu (EPR), rentgen quruluş analiz (RQA) üsulu və fırlanma dixroizmi (FD) üsulu.

Spektroskopik üsullar ilə biomolekulların kimyəvi quruluşu və tərkibi haqqında geniş məlumat əldə etmək mümkündür [9,11]. Belə ki, mühitdə İQ-spektrlər vasitəsilə 1) bütün amid rabitələrinin *cis*- və *trans*-konfigurasiyalarını tam aydınlığı ilə bir-birindən ayırmaq mümkün olur; 2) disulfid rabitələrinin mövcudluğunu müəyyənləşdirmək olur; 3) yan zəncirin hidrogen rabitələri yaratmaq imkanları haqqında geniş məlumat almaq olur.

NMR üsulu ilə bir sıra neyropeptid təbiətli molekulların fəza quruluşları, o cümlədən temperaturun müxtəlif qiymətlərində onların əsas və yan zəncirlərinin pH fizioloji tərkibi müəyyən edilmiş, dinamik xarakteristikaları, fəzada yerləşmələrinin müxtəlif oriyentasiyaları barədə məlumat əldə edilmişdir [1].

Biomolekulların tədqiqi üçün istifadə edilən üsullar içərisində rentgenquruluş analiz (RQA) üsuluna daha çox üstünlük verilir. RQA-tədqiq olunan nümunədən səpilmiş rentgen şüalarının fəzada paylanmasına və intensivliyinə əsasən maddələrin quruluşunu öyrənən üsuldur. Qeyd etmək lazımdır ki, bu üsul zülal molekullarının tədqiqində bir sıra nəticələrin alınması üçün effektiv üsul hesab edilsə də, zülallardan fərqli olaraq peptid molekullarının daha çox mütəhərriqliyi hesabına, RQA üsulu ilə aydın fiksə olunmuş quruluşları almaq mümkün olmamışdır. Bu da öz növbəsində, bioloji fəal quruluşun seçilməsini, yəni konkret bioloji funksiyanı yerinə yetirməyə cavabdeh olan quruluşun tapılmasını çətinləşdirir.

FD spektrləri vasitəsilə isə kiçik peptid təbiətli molekulların konformasiya dəyişikliklərini, yəni bir konformasiya halından digər hala keçməsinə təhlil etmək mümkündür.

## Nəzəri hesablama üsulları

Nəzəri hesablama üsulları dedikdə son illər biomolekulların tədqiqində geniş istifadə olunan nəzəri konformasiya analizi üsulu və molekulyar dinamika üsullarını misal çəkmək olar [2,5].

Nəzəri konformasiya analizi üsulunun əsası XX əsrin 50-ci illərində qoyulmuşdur. Burada istifadə olunan yarımempirik potensial funksiyalar və onların parametrləri [6,7,8] işlərindən götürülmüşdür, nəticələri şərh etmək üçün isə standart identifikatorlar sistemindən istifadə olunmuşdur [10].

Nəzəri konformasiya analizi üsuluna əsasən ixtiyari biomolekul aomlar sistemi kimi götürülür və bu zaman onun nüvə-elektron quruluşu nəzərə alınmır. Həm nəzəri konformasiya analizi üsulunda, həm də molekulyar dinamika üsulunda tam enerji aşağıdakı enerjilərin additiv cəmi şəklində ifadə olunur:

$$E_{\text{tam}} = E_{\text{q.v.}} + E_{\text{el.st.}} + E_{\text{tor.}} + E_{\text{hr.}}$$

Burada  $E_{q,v}$  - qeyri-valent, və ya Van –der-Vals qarşılıqlı təsir enerjisidir; onu hesablamaq üçün Lennard-Consun "6-12"  $\rightarrow E_{q,v} = -A_{ij}r_{ij}^{-6} + B_{ij}r_{ij}^{-12}$  potensialından istifadə edilir (potensialdakı A və B parametrləri eksperimentdən tapılan qiymətlərdir.  $r_{ij}$  - i və j atomları arasında məsafədir);

$E_{el,st}$  - elektrostatik qarşılıqlı təsir enerjisini təmsil edir; onun qiyməti Kulon qanunu ilə hesablanır:  $E_{el,st} = \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$  ( $q_i, q_j$  - nöqtəvi yüklər,  $r_{ij}$  - i və j atomları arasındakı məsafə,  $\epsilon$ -dielektrik nüfuzluğu adlanır və  $H_2O$  (su) mühiti üçün  $\epsilon=10$  götürüldükdə təcrübi nəticələr nəzəri hesablamaların nəticələri ilə üst-üstə düşür);

$E_{tor}$ - torsion və ya valent rabitələr ətrafında fırlanma enerjisidir və onu hesablamaq üçün  $E_{tor} = \frac{1}{2}E_0(1 - \cos n\varphi)$  düsturundan istifadə edilir ( $E_0$ - potensial çəpərin hündürlüyü,  $\varphi$ -ikiüzlü bucaq, n-isə molekulun simmetriya elementinə uyğun olan parametrdir. Məsələn, 3-cü tərtib simmetriya oxuna malik molekul üçün  $n=3$  olur);

$E_{h,r}$ - hidrogen rabitələrinin yaranma enerjisidir. Bu enerjini hesablamaq üçün əsasən  $E_{h,r} = D(1 - e^{-n\Delta r})^2 - D$  Morze potensialından istifadə olunur ( $D$ -dissosiasiya enerjisidir və onun qiyməti 1.5 kkal/mol tərtibindədir,  $\Delta r = r - r_0$ , r-hidrogen rabitələri arasındakı məsafə,  $r_0 = 1.8 \text{ \AA}$  (NH...OC) - hidrogen rabitələrinin tarazlıq məsafəsi, n isə empirik parametrdir ( $n=3(\text{A}^\circ)^{-1}$ ).

Hesablamalar apararkən ikiüzlü bucaqların qiymətləri standart nomenklaturaya uyğun götürülür.

Molekulyar dinamika üsulu. Makmolekulların daxili mütəhərriqliyinin modelləşdirilməsində geniş istifadə olunan nəzəri üsullardan biri də molekulyar dinamika üsuludur [7,12]. Bu üsulun əsasını makromolekulu təşkil edən atomların koordinat və impulslarının faza fəzasında klassik (nyuton) hərəkət trayektoriyasının hesablanması təşkil edir [13]. Molekulyar dinamika üsulunda biomolekula qarşılıqlı təsirdə olan kiçik hissəciklər sistemi kimi baxılır və atomların klassik hərəkət trayektoriyaları empirik atom-atom potensialının qüvvə sahəsində hesablanır. Bu üsulla makromolekulun daxili mikroskopik istilik hərəkəti subnanodəqiqə intervalında modelləşdirilir. Ətraf mühitlə enerji mübadiləsi effektlərini nəzərə almaq və sistemin temperaturunu sabit saxlamaq məqsədilə xüsusi alqoritmdən - Berendsen termostatından istifadə olunur. Temperaturun tarazlıq qiymətindən kənara çıxmaları Landau-Teller tənliyi vasitəsilə korreksiya edilir.

Molekulyar dinamika üsulunda tədqiq edilən molekulun konformasiya mütəhərriqliyinə ətraf mühitin təsiri sistemə su molekullarının daxil edilməsi və sərhəd şərtlərinin qoyulması ilə həyata keçirilir. Bu üsulla ilk addımda bütün zərrəciklərin koordinat və sürətlərini verməklə, sonrakı addımlarda zərrəciklərə təsir edən bütün qüvvələri, onların koordinatlarını və sürətlərini hesablamaq mümkün olur.



Deyilənləri ümumiləşdirərək o nəticəyə gəlmək olar ki, nəzəri komformasiya və molekulyar dinamika üsullarının təcürbi üsullarla müqayisədə bir sıra üstünlüklərinə baxınayaraq, biomolekulların fəza quruluşlarını tədqiq etmək üçün, həm təcürbi yolla tapılmış qiymətlərdən, həm də nəzəri hesablamalardan birgə istifadə edilərsə, tədqiq edəcəyimiz molekulun molekul daxili qarşılıqlı təsir enerjisinin minimum qiymətinə uyğun gələn dayanıqlı halını – konformasiyasını daha dəqiq müəyyənənləşdirmək mümkün olar.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Лундин А.Г., Федин Э.И. ЯМР-спектроскопия. М.: Наука, 1986, 224 с.
2. Полозов Р.В. Метод полуэмпирического силового поля в конформационном анализе биополимеров. М.: Наука, 1981, 120 с.
3. Попов Е.М. Структурная организация белков. М.: Наука, 1989, 352 с.
4. Чипенс Г.И., Полевая Л.К., Веретинникова Н.И., Крикис А.Ю. Структура и функции низкомолекулярных пептидов. Рига: Зинатне, 1980, 328 с.
5. Шерман С.А., Андрианов А.М., Ахрем А.А. Конформационный анализ и установление пространственной структуры белковых молекул. Мн.: Наука и техника, 1989, с.62-63
6. Allinger N.L., Burkert U. Molecular Mechanics. A.C.S. Monograph, 1982, N.177, American Chemical Society, Washington, DC.
7. Allinger N.L., Zhou X., Bergsman J. Molecular mechanics parameters. J. of Mol. Struc. (Theochem.), 1994, v.312, p.69-83
8. Gelin B.R., Karplus M. Side-Chain torsion potentials. Biochem. Soc. Trans., 1979, v.18, N.7, p.1156-1268
9. Havel H.A. Spectroscopic methods for determining Protein Structure in Solution. Ed. VCH Publishers, 1996, 250 pp.
10. IUPAC-IUB Joint Commission on Biochemical Nomenclature. J. Biol. Chem., 1983, v.260, p.14-42
11. Jones C., Mulloy B., Thomas A.H. Spectroscopic methods and analysis. Eds., Humana Press, Totowa, NJ, 1993, 395 pp.
12. Levitt M. Protein folding by Restrained Energy Minimization and Molecular Dynamics. J. Mol. Biol., 1983, v.170, p.723-764
13. Mc Guire R.F., Momany F.A., Scheraga H.A. Energy parameters in polypeptides. An empirical hydrogen bond potential function based on molecular orbital calculations. J. Phys. Chem., 1972, v.76, N.3, p.375-393

#### МЕТОДЫ ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ИЗУЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ БИМОЛЕКУЛ

Л.И.ВЕЛИЕВА, О.Г.ГУЛЕХМЕДОВ

#### РЕЗЮМЕ

В работе был рассмотрен некоторые аспекты экспериментальных и теоретических методов, используемых при изучении пространственной структуры биомолекул.

**Ключевые слова:** спектроскопические методы, конформация, теоретический конформационный анализ, структура, метод молекулярной динамики

# METHODS USED IN THE STUDY OF THE SPATIAL STRUCTURE OF BIOMOLECULES

L.I.VELIYEVA, O.G.GULEXMEDOV

## SUMMARY

In this paper, some aspects of experimental and theoretical methods used in the study of the spatial structure of biomolecules were considered.

**Keywords:** spectroscopic methods, conformation, theoretical conformational analysis, structure, molecular dynamics method

*Redaksiyaya daxil oldu: 09.10.2019-cu il*

*Çapa imzalandı: 28.12.2019-cu il*

## XAOS VƏ ONUN İDARƏ OLUNMASI

R.A.NURİYEV

*Azərbaycan MEA Fizika İnstitutu**rus.nuriyev.74@mail.ru*

*Bu məqalədə məqsəd dinamik sistemlərdə deterministik xaos, xaosun idarə olunması üsulları haqqında, o cümlədən xaosun rəqslərinin sinxronlaşması barədə məlumatların qısa icmalını təqdim etməkdir.*

**Açar sözlər:** sinxronlaşma, xaosun ossilyatorları, Ot-Greboji-York metodu, Deterministik xaos.

**1. Deterministik xaos**

Deterministik xaos [1-3] deyəndə nə başa düşülür? Əvvəlcə ayrı-ayrılıqda cavab verməyə çalışaq ki, deterministiklik və xaos nə deməkdir, sonra isə deterministik xaos ifadəsinin məzmununa aydınlıq gətirək. Deterministiklik deyəndə təbiətdə səbəb və nəticə arasında qarşılıqlı birmənalı əlaqə başa düşülür. Başqa sözlə, əgər hər hansı bir sistemin başlanğıc vəziyyəti hər hansı bir  $t = t_0$  zaman anında məlumdursa, bu sistemin istənilən  $t > t_0$  zaman anında vəziyyəti bir mənəli olaraq təyin edilir.

İndi isə qısaca xaos nədir sualına cavab verməyə çalışaq. Bu məqsədlə məşhur Braun hissəciklərinin hərəkətini xatırlayaq. Bu hissəciyi  $t = t_0$  anında maye məhlulda yerləşdirək və mikroskop vasitəsilə onun koordinatlarını bərabər zaman anından sonra fiksasiya edək. Asanlıqla müşahidə etmək olar ki, maye molekullarının təsadüfi zərbələri nəticəsində Braun hissəciyi müxtəlif istiqamətlərdə qeyri-rəqulyar hərəkət edəcək və hərəkət trayektoriyası da çox mürəkkəb olacaq. Eksperimenti hissəciyin başlanğıc vəziyyətini mümkün qədər dəqiq təkrar etməklə bir neçə dəfə də həyata keçirək. İki əsas nəticəyə gəlmək olar: *birinci nəticə* – hər dəfə alınır ki, hissəciyin trayektoriyası mürəkkəbdir və qeyri-periodikdir; *ikinci nəticə* – eksperimentdə hissəciyin başlanğıc vəziyyətinin mümkün qədər dəqiq fiksasiya edilməsinə baxmayaraq hər dəfə yeni trayektoriya alınır. Braun hissəciyinin hərəkəti xaosun trayektoriyaları haqqında kifayət qədər dolğun məlumat verir: hissəcik qabaqcadan hesablanması mümkün olmayan trayektoriyalar boyunca təsadüfi hərəkət edir. Bu mənada Braun hissəciyinin hərəkətini xaosun adlandırmaq olar. Yəni xaos, xaosun hərəkət deyiləndə ilk növbədə trayektoriyasının qabaqcadan hesablanması mümkün deyil və eyni

başlanğıc şərtlərə baxmayaraq trayektoriyanın təkrar oluna bilməməsi başa düşülür. Beləliklə, o nəticəyə gəlirik ki, deterministlik və xaos bir-birinə əks qütblərdə yerləşən anlayışlardır [3-7]. Belə ki, deterministlik sistemin trayektoriyasının əvvəlcədən hesablanma bilməsi və eyni başlanğıc şərtləri altında trayektoriyanın təkrarlanması anlamına gəlirsə, xaosluq bunun tam əksini özündə ehtiva edir. Belə halda bir-birinə əks qütblərdə yerləşən iki konsepsiyanı-deterministlik və xaosluq anlayışlarını necə birləşdirmək olar? Bu suala cavab vermək üçün əvvəlcə trayektoriyanın sabillik və ya qeyri-sabillik anlayışlarını daxil edək.

## 2. Sabillik, qeyri-sabillik və qeyri-xəttilik

Sistemin tarazlıq və ya sükunət vəziyyətində olduğunu fərz edək. Əgər sistemi bu vəziyyətdən çıxarsaq, bəzi hallarda sistem müəyyən relaksasiya vaxtından sonra yenə də tarazlıq vəziyyətinə qayıdır. Bu halda qəbul olunur ki, sistemin vəziyyəti stabildir, yəni dayanıqlıdır: sistemin başlanğıc vəziyyətinin kiçik həyəcanlanmaları zaman keçdikcə sönür. Əgər kiçik həyəcanlamalar zaman keçdikcə artırsa, sistem dayanıqlığını itirir və bu halda onun vəziyyəti qeyri-sabildir.

Qeyd edildiyi kimi, qeyri-sabit sistemlərdə kiçik həyəcanlanmalardan sonra sistem tarazlıq vəziyyətindən uzaqlaşır, başqa sözlə həyəcanlanmalar getdikcə artır. Sual olunur ki, belə artım nə qədər davam edə bilər. Aydın ki, belə vəziyyət sonsuzluğa qədər davam edə bilməz, çünki real həyatda bu baş verə bilməz. Belə ki, hər hansı prosesin amplitudunun artması sonsuzluğa gedə bilməz. Deməli, gec-tez bu artımı məhdudlaşdırma bilən bir qeyri-xətti mexanizm işə düşəcək. Sistemin enerji resursları sonsuz deyil deyə, bir müddət sonra amplitudun artması ya dayanmalı, ya da azalmalıdır. Böyük amplitudlarda isə sistemdə qeyri-xəttiliyin təzahürləri özünü bununla büruzə verir. Başqa sözlə, qeyri-xətti sistemin özünü necə aparması onun vəziyyətindən asılıdır. Tutaq ki, sistemin tarazlıq vəziyyətindən uzaqlaşma amplitudu

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^3 \quad (1)$$

tənliyi ilə hesablanma bilər. Burada  $a$  və  $b$  müəyyən müsbət əmsallardır.

Bu halda  $x$ -in vahiddən çox kiçik qiymətlərində  $bx^3$  həddini nəzərə almamaq olar, yəni belə vəziyyətdə həlledici həll xətti  $ax$  olur ki, bu da amplitudun qeyri-məhdud artmasına gətirib çıxarır. Amma nəzərə almaq lazımdır ki, amplitud artanda artıq qeyri-xətti  $bx^3$  həddi əhəmiyyət kəsb etməyə başlayır və ona görə də əslində zamanın böyük qiymətlərində amplitud stasionar həllə yaxınlaşır, yəni amplitudun dəyişməsi dayanır. Beləliklə, proses yenidən təkrar oluna bilər və bu cür sistemlər dinamikalarını öz-özünə idarə edə bilmək qabiliyyətinə malikdirlər. Sistemin dinamikası onun cari vəziyyətindən əsaslı dərəcədə asılıdır [4-10].

Beləliklə, qeyri-xəttilik hesabına sistemin trayektoriyasının məhdudlaşdırılması sistemi əvvəlki vəziyyətinə qaytara bilər, daha doğrusu o vəziyyətin yaxın ətrafına, çünki sistemin başlanğıc vəziyyəti qeyri-stabildir. Sonra proses yenidən təkrarlanır.

Dinamik sistemlərin nəzəriyyəsiindən aydındır ki, bu halda ikiölçülü fəzada yalnız stabil periodik trayektoriyalar mövcud ola bilər. Digər hallarda isə sistemin dinamikası ona gətirib çıxarır ki, sistemin trayektoriyaları kəsişir, bu isə verilmiş başlanğıc şərtlər daxilində həllin yeganəlik teoreminə ziddir.

### **3. Deterministik xaos və qarışdırma**

Bu faktı nəzərə alaraq sistemin dinamikasına üçölçülü fəzada baxaq. Bu halda da iki variant mövcuddur. Birinci halda sistemin trayektoriyası mürəkkəb əyriyə üzrə hərəkət etdikdən sonra başlanğıc vəziyyətə qayıdır və sistemin dinamikası qapalı, amma mürəkkəb əyri üzrə həyata keçir. Başqa sözlə, sistemin dinamikası periodikdir. İkinci halda isə trayektoriyanın qapanması baş vermir, dinamika isə qeyri-periodikdir [1-3]. Bu hal isə deterministik xaos rejiminə uyğun gəlir. Doğrudan da bu halda sistem deterministikdir, çünki sistemin gələcəyi birmənalı olaraq onun başlanğıc vəziyyəti ilə təyin olunur; eyni zamanda sistemin dinamikası qeyri-periodikdir, mürəkkəbdir. Bu hal daha çox təsadüfi, ehtimal proseslərə oxşayır. Bununla belə bu sistemlər təsadüfi sistemlərdən mühüm bir xarakteristikası ilə fərqlənir: deterministik xaos prosesi təkrar olunandır! Doğrudan da sistemin başlanğıc şərtlərini dəqiq təkrar etməklə sistemin, nə qədər mürəkkəb olursa-olsun trayektoriyasını da təkrar etmək olar.

Deterministik xaos nümayiş etdirən sistemlərin digər mühüm bir xüsusiyyəti isə onun trayektoriyalarının fəzanın verilmiş hissəsində yayılaraq onu doldurmasıdır. Belə proses daha çox xırda mürəkkəb damcısının stəkandakı suyu qaşığıla qarışdırdıqda onun həcmi bərabər şəkildə yüngül boyamasına bənzəyir. Bu xüsusiyyət də sistemdə olan qeyri-stabillik ilə sıx bağlıdır. Bu proses dissipativ, yəni enerji itkisinin olduğu sistemlərdə özünü qabarıq şəkildə büruzə verir.

Beləliklə, qeyri-stabil deterministik qeyri-xətti sistemlərdə sistemin gələcək trayektoriyasını qabaqcadan söyləmək mümkündür, bir şərtlə ki, başlanğıc vəziyyət dəqiq məlum olsun. Əgər başlanğıc vəziyyətin təyin olunmasında müəyyən qeyri-dəqiqlik varsa belə proqnozlar özünü doğrultmur. Yuxarıda gətirdiyimiz stəkandakı su və mürəkkəb damcısı eksperimentində mürəkkəb damcısını xırda çay qarası ilə əvəz etsək dediyimizin mənası daha da aydınlaşar. Çay qarası başlanğıc şərtlərinin dəqiq verilməsi anlamına gəlir; bu halda suyu qarışdırdıqda çay qarasının trayektoriyasını mayenin istənilən nöqtəsində dəqiq hesablamaq olar. Xırda mürəkkəb damcısı isə başlanğıc şərtlərinin verilməsində qeyri-dəqiqliyin nümunəsidir. Mayeni qarışdırdıqda alınan dinamika əsl xaosa uyğun gəlir. Bu proses daha çox təsadüfi, ehtimal hadisələrinə uyğun gəlir. Beləliklə, deterministik xaos nümayiş etdirən dinamik sistemlərin əsas xüsusiyyəti belə sistemlərin başlanğıc şərtlərinin verilməsindəki çox cüzi qeyri-

dəqiqliyə yüksək həssaslıq nümayiş etdirməsidir. Məhz belə bir həssaslıq sistemin trayektoriyasının proqnozlaşdırılmasının mənasızlığına və dinamik sistemlərin öyrənilməsində ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqinə imkan yaradır. Bu mənada deterministik xaos hadisəsi o anlama gəlir ki, bu zaman deterministik qanunlarla idarə olunan sistemlərdə təsadüfi, küyəbənzər və ehtimal nəzəriyyəsinin predmeti olan xaos yaranır.

Qeyd edək ki, sistemin başlanğıc şərtlərinin verilməsindəki qeyri-müəyyənlik fiziki proseslər baxımından realistik hadisədir. Doğrudan da, istənilən ölçmə cihazı bu ölçmələri müəyyən xətlərlə həyata keçirir. Bu isə o deməkdir ki, başlanğıc şərt kimi əslində başlanğıc nöqtə yox, onun ətrafında bu xətəyə uyğun xırda oblast götürülməlidir. Bu isə stəkandakı suya atılmış xırda mürəkəb damcısı kimi əsl xaosa gətirib çıxarır.

Beləliklə, belə nəticəyə gəlmək olar ki, dissipativ qeyri-xətti sistemlərdə deterministik xaos mümkündür və bu hal kifayət qədər ümumiləşmiş hadisə olmalıdır. Hal-hazırda bu hadisənin möhkəm nəzəri bünövrəsi var və elmin müxtəlif sahələrində, məsələn, fizikada, kimyada, biologiyada, iqtisadiyyatda, sosiologiyada, tibbdə çoxsaylı eksperimentlər xaosun mövcudluğuna dəlalət edir [11-22]. Başqa sözlə deterministik xaos riyazi ekzotika deyil, real dünyada geniş müşahidə olunan bir hadisədir.

Qeyd edək ki, deterministik xaos ilk dəfə meteorologiya elmində hava proqnozu ilə bağlı araşdırmalar hələ 1963-cü ildə Lorenz tərəfindən kəşf olunsa da, bu kəşfə vaxtında bir çox hallarda olduğu kimi lazımı diqqət yetirilməmişdi. Bunun əsas səbəblərindən biri müəyyən mənada elmi araşdırmalarda o vaxtlar xətti yanaşmanın hakim olması ilə bağlı idi. O vaxtlar hər hansı bir ölçü kəmiyyətinin özünü xaoitik aparmasını fluktuasiyalarla, ölçmələrin qeyri-dəqiqliyi ilə və sair səbəblərlə izah edirdilər. Heç kim qəbul etmirdi ki, bu xaoitlik qeyri-xətti sistemin daxili dinamikasının təzahürü ola bilər. Yalnız XX əsrin sonlarına yaxın elmi araşdırmalarda qeyri-xəttilik prinsipinin geniş yayılmasından sonra xaoitik dinamika istisnasız olaraq elmin bütün sahələrində özünün layiqli yerini tutdu. Riyazi cəhətdən dissipativ sistemlərin trayektoriyaları zaman sonsuzluğa yaxınlaşanda attraktorda cəmlənir. Stabil sistemlər üçün attraktor rolunu tərpənməz nöqtə oynayır; stabil periodik sistemlər üçün attraktor limit siklinə çevrilir. Əvvəllər belə hesab olunurdu ki, attraktor anlayışı yalnız stabil sistemlərə aid edilə bilər. İndi məlum olur ki, bu anlayış həm də deterministik xaos nümayiş etdirən qeyri-xəttə sistemlərə də şamil oluna bilər. Bu fakt ondan irəli gəlir ki, belə sistemlərdə də trayektoriyalar zaman keçdikcə fəzanın məhdud oblastında yerləşirlər. Amma qeyd etmək lazımdır ki, deterministik xaos sistemlərində attraktor müəyyən qərribə xüsusiyyətlərə malikdir. Belə ki, bu attraktorların trayektoriyası qeyri-periodikdir, yəni trayektoriyalar qapanmırlar və onlar qeyri-stabil şəraitdə özlərini göstərirlər. Bu səbəblərdən deterministik xaos sistemlərində attraktoru qərribə attraktor adlandırırlar. Belə qərribəlik özünü bir sıra kəmiyyətlərdə büruzə verir.

Belə ki, qeyd olunduğu kimi, qərribəliyin ən əsas meyarlarından biri siste-

min trayektoriyalarının eksponensial qeyri-stabilliyidir. Başqa sözlə trayektoriyaların kiçik həyəcanlanması zaman keçdikcə eksponensial şəkildə artmalıdır. Bu isə o deməkdir ki, trayektoriyaların həyəcanlanma tempini göstərən eksponensial əmsal müsbət olmalıdır.

Riyazi cəhətdən, trayektoriyanın başlanğıc həyəcanlanması  $x(0)$  zaman keçdikcə

$$x(t) = x(0) \exp(\lambda t)$$

qanunu ilə artmalıdır. Burada  $\lambda$  eksponensial əmsaldır. Bir çox hallarda isə ona Lyapunov əmsalı da deyirlər. Bu əmsalın müsbət olması deterministik xaosun əmələ gəlməsi üçün əsas şərtidir. Deterministik xaos sistemlərinin trayektoriyasının qeyri-periodik olması ona gətirib çıxarır ki, belə sistemlərin spektri bütöv olur; məlumdur ki, periodik trayektoriyalar üçün spektr əsas tezlikdən və onun harmonikalarından ibarət xətlərdən təşkil olunmuşdur. Deterministik xaos sistemlərinin trayektoriyası qeyri-periodik olduğundan bu trayektoriyaların müxtəlif hissələri arasında korrelyasiya çox aşağıdır. Deterministik xaos sistemlərinin qəribəliklərindən biri də onların attraktorunun ölçüsünün tam ədədlərlə deyil, kəsr ədədlərlə ifadə olunmasıdır. Nümunə üçün xatırladaq ki, nöqtəvi attraktorun ölçüsü sıfır, xəttin ölçüsü 1, müstəvinin ölçüsü 2-dir və s. Deterministik xaos sistemlərinin ən məşhur nümunələrindən biri olan Lorens attraktorunun ölçüsü (sistemin parametrlərinin çox tez-tez istifadə olunan qiymətlərində) isə 2.06-ya bərabərdir. Deterministik xaos sistemlərinin yuxarıda qısa şəkildə sadalanan səciyyəvi xüsusiyyətləri belə sistemləri ehtimal nəzəriyyəsinə, statistikada öyrənilən təsadüfi sistemlərə bənzədir. Bu mənada deterministik xaos sistemləri təsadüfi ədədlər, küy yarada biləcək generatorlar kimi də qəbul edilə bilər.

#### **4. Xaosun idarə olunması**

Xaosun idarə olunması ideyası [23-29] haqqında qısaca məlumat verilməlidir. Xaosun zərərli və ya xeyirli bir hadisə olmasını əvvəlcədən söyləmək düzgün olmaz. Bu, belə dinamikadan hansı kontekstdə söhbət getməsindən asılıdır. Məsələn, xaos kimyəvi reaksiyaların sürətinin artırılmasında, bir sıra hallarda istilik və kütlə mübadiləsinin artırılmasında müsbət rol oynaya bilər. Bəzi hallarda isə xaos dinamika arzuolunmazdır. Məsələn, konstuksiyaların qeyri-requlyar, xaos vibrasiyası onların zədələnməsində və sıradan çıxmasında əlavə mənfi rol oynaya bilər. Bundan əlavə, fəlsəfi anlamda xaos sistemlərin qeyri-müəyyənliyi psixoloji durumda əlavə gərginlik mənbəyi ola bilər.

Bu səbəblərdən xaosun idarə olunmasının, yəni xaos dinamikasının daha intensiv olmasının və ya onun aradan qaldırılmasının mühüm praktiki və nəzəri əhəmiyyəti var. Praktiki mənada xaosun idarə olunması xaos rəqslərin kvaziperiodik, periodik rəqslərə və ya stasionar vəziyyətə çevrilməsini ehtiva edir. Bəzi hallarda xaos dinamikasının intensivləşdirilməsi xaosun anti-kontrolü adlanır.

Son illər intensiv şəkildə araşdırılan bu elm sahəsinin başlanğıcı keçən əsrin 90-cı illərinə təsadüf edir. Xaosun idarə olunması faktiki olaraq 1990-cı ildən həyata keçirilir. Bu nəzəriyyənin başlanğıcı amerikalı fizikləri Ot-Greboji-York (OGY) tərəfindən qoyulmuşdur [23,30]. O vaxtdan xaosun idarə olunması termini fundamental şəkildə elmi leksikona daxil olmuşdur. Qeyd olunduğu kimi, xaos dinamikada sistem başlanğıc şərtlərinə xüsusi həssaslıq nümayiş etdirir. Başqa sözlə, sistemin parametrlərinin xaos yaradan qiymətlərində başlanğıc şərtlərinin cüzi həyəcanlanması zaman keçdikcə eksponensial şəkildə artmağa başlayır. Məhz bu cür hiperhəssaslıq xaosun idarə olunmasında kritik əhəmiyyətə malikdir. OGY metodu elə bu cür həssaslığa söykənir. Hal-hazırda bu metod və onun variasiyaları elmin müxtəlif sahələrindəki, o cümlədən ürək və beyində mümkün olan xaos dinamikasının idarə olunmasında müvəffəqiyyətlə tətbiq olunur. Riyazi mənada xaosun idarə olunması bir çox dinamik sistemlərdə sınaqdan çıxarılmışdır. Zamana görə xaosluq nümayiş etdirilən sistemlər tətbiq üçün daha tez-tez istifadə olunur. Bu sistemlər adətən adi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunur və fəza ölçüsü sonludur. Məxsusi törəməli diferensial tənliklər sistemi həm zamana, həm də fəzaya görə xaosluq dinamikasının təsvir olunmasında tətbiq edilir. Bu cür sistemlər sonsuz fəza ölçüsünə malikdir. Qeyd etmək lazımdır ki, funksional diferensial tənliklərin bir qolu olan zamana görə gecikən sistemlər də sonsuz fəza ölçüsünə malik sistemlərin təsvir olunmasında geniş istifadə olunur. Bu məqalə məhz belə sistemlərdə xaosluq dinamikasının idarə olunmasının bir növü olan xaosluq sistemlər arasında sinxronlaşmaya həsr olunub.

Xaosun idarə olunmasına dair ilk yanaşma olan OGY metoduna qayıdaraq qeyd edək ki, istənilən idarə olunmada məqsəd olan obyektin stabilləşdirilməsi çox vacibdir. Tutaq ki, məqsəd özündə xaosluq dinamikasının periodik rəqsə çevirilməsini və bu rəqsin stabilləşdirilməsini ehtiva edir. Xaosluq dinamikasının idarə olunmasında məsələnin bu cür qoyuluşu təbiidir, çünki belə dinamika əslində sonsuz sayda periodik rəqslərin toplusudur. Başqa sözlə, belə rəqslər xaosluq dinamikasının karkasını (arxitekturasını) təşkil edir və sistemin xaosluq oblastda hərəkəti bu periodik rəqslər arasında keçidləri də özündə ehtiva edir. Sözsüz ki, qeyri-xətti sistemin bu periodik orbitlər üzrə performans (məyyən kriteriyalara görə) fərqlənəcək. Situasiyadan asılı olaraq sistemin bu və ya digər periodik orbit üzrə hərəkəti əlverişli ola bilər. Başqa sözlə, sistemin fəaliyyətini müəyyən meyarlara görə optimallaşdırmaq olar. Bunun üçün tələb olunan işə sistemi bu və ya digər «lazımı» periodik orbitlər üzrə hərəkət etməyə «məcbur etməkdir». Beləliklə, OGY metod qeyri-xətti sistemin fəaliyyətini optimallaşdırmağa imkan verir. Tutaq ki, sistemin fəaliyyəti müəyyən orbit üzrə müşahidəçini qane edir. Onda qarşıda duran əsas məqsəd həmin orbit üzrə sistemin stabil hərəkətini təmin etməkdir. Erqodik nəzəriyyəyə görə sistem gec-tez «sərfəli» orbitə yaxınlaşacaq və keçid edəcək. Bu keçid baş verən kimi sistemin parametrlərinin və ya dinamik dəyişənlərin kiçik həyəcanlanmalarının köməyiylə sistemi həmin trayektoriya üzrə hərəkətə məcbur etmək olar. Qeyd



edək ki, periodik orbitlər arasındakı keçidləri də kiçik həyəcanlanma üsulu ilə sürətləndirmək olar. Əgər sistemdə küy, xarici stoxastiklik varsa bu əməliyyatları bir neçə dəfə təkrar etmək lazım gələcək. Göründüyü kimi, OGY metod çox geniş yayılmış qeyri-xətti sistemlərin fəaliyyətinin optimallaşdırılmasında böyük imkanlara malikdir. Əlavə olaraq qeyd etmək lazımdır ki, xaosun idarə olunmasında istifadə olunan OGY metodda qeyri-xətti sistemin hərəkət tənliklərini bilmək tələb olunmur. Bu fakt tətbiq nöqtəyi-nəzərindən çox böyük əhəmiyyətə malikdir, çünki real eksperimentdə və ya mürəkkəb sistemlərin idarə olunmasında belə tənliklərin tərtib olması həddən artıq çətindir, bəzi hallarda isə demək olar ki, qeyri-mümkündür.

Təcrübələr göstərir ki, OGY metod əsasən diskret dinamik sistemlərdə daha yaxşı nəticələr verir. OGY metodu  $\lambda\tau \gg 1$  şərtinin ödənilməsi periodik orbitlər üçün daha effektivdir. Burada  $\lambda$  stabilləşdirilən periodik orbit üçün maksimal Lyapunov əmsalındır;  $\tau$  isə sistemin idarə olunması zamanı parametrlərin dəyişməsi arasındakı zaman intervalıdır. Parametrlərin diskret dəyişməsi zamanı idarə olunmanın effektivliyi küyü də nəzərə alındıqda azala bilər, hətta idarəetmə nəticəsiz qala bilər. OGY metodunun bu cür fundamental çatışmazlıqları ona gətirib çıxardı ki, fasiləsiz əks-əlaqə rəbitəsinə malik idarəetmə metodları geniş yayılmağa başladı. İlk dəfə belə yanaşma Pyragasın işlərində tətbiq olunmuşdur [31-33]. Burada sistemin parametrlərinin kiçik həyəcanlanmaları fasiləsiz tətbiq olunur. Sözsüz ki, izafi xərc baxımından fasiləsiz yanaşma effektiv olmaya bilər, amma əsas məqsəd – idarəetmə həyata keçirilir. Fasiləsiz həyəcanlanmalar metodunun OGY metodundan prinsipial bir fərqi də qeyd etmək yerinə düşər. OGY metodunda qeyri-xətti sistemin trayektoriyasının lazımı periodik orbitə yaxınlaşmasını gözləmək lazım gəlir ki, bu yaxınlaşmadan sonra kiçik həyəcanlanmaları tətbiq edə bilərsiniz. Fasiləsiz həyəcanlanmalar metodunda isə belə gözləməyə ehtiyac yoxdur, həyəcanlanmalar istənilən zaman anında tətbiq oluna bilər.

## 5. Xaotik rəqslərin sinxronlaşması

Avtorəqslərin sinxronlaşması qeyri-xətti fizikada fundamental problemlərdən biridir və artıq Hüygensin vaxtından bir neçə yüz ildir ki, tədqiqatçıların diqqətini cəlb edir. Xatırlayaq ki, Hüygens ilk dəfə bu hadisəni bir-bir ilə əlaqəli mexaniki sistemlərin-rəqqas saatların timsalında araşdırmışdı. Son onilliklər bu sahədə araşdırmaların mərkəzi xaotik rəqslərin sinxronlaşmasına yönəldilmişdir ki, bu da qeyri-xətti fizikada deterministik xaosa və onun müxtəlif sahələrdə tətbiqi ilə bağlı diqqətdən irəli gəlir. Bu mənada xaotik rəqslərin sinxronlaşması sahəsi dinamik kaos nəzəriyyəsinin davamı olaraq meydana çıxmışdır. Bu sahənin intensiv inkişafı onun həm fundamental, həm də praktiki əhəmiyyəti ilə bağlıdır [34]. Belə ki, xaotik rəqslərin sinxronlaşması məxfi informasiya mübadiləsində, bir sıra bioloji, fizioloji, kimyəvi proseslərdə əsas rol oynayır [34]. Bu sahə həm də xaosun idarə olunması nöqtəyi-nəzərindən mü-

hüm əhəmiyyətə malikdir. Bir sözlə, xaoitik rəqslərin sinxronlaşması həm fiziki aləmdə, həm də canlı aləmdə mühüm rola malikdir. Burada canlı orqanizmlərdə nəfəsalmə və ürək-damar sistemi arasında əlaqə, beyində neyronların sinxronlaşmasının bir sıra hallarda, məsələn, epilepsiya xəstəliyində rolu, xarici stimulların beyinə təsiri və s. prosesləri xatırlamaq olar. Amma yadda saxlamaq lazımdır ki, bu sadalananlar xaoitik rəqslərin sinxronlaşmasının aid olduğu sahələrin çox cüzi bir hissəsidir. Son illər qeyd olunan sahələrlə yanaşı xaoitik rəqslərin sinxronlaşmasının məxfi informasiya emalı sistemlərində tətbiqi də intensiv tədqiq olunan sahələrdəndir. Qeyd etmək zəruridir ki, bu sahədə işlər artıq nəzəri, modelləşdirmə müstəvisindən praktiki müstəviyə keçməkdədir. Özü də bu yeni yanaşma əsasında mövcud infraqsturadan bəhrələnməyə məxfi informasiyanın ötürücü stansiyada onlarla kilometr məsafəyə kodlaşdırılaraq ötürülməsi və qəbuledici stansiyada isə stansiyalar arasında sinxronlaşma hesabına məxfi informasiyanın dekodlaşdırılması artıq reallıqdır. Bir çox hallarda belə yanaşma ötürücü və qəbuledici stansiyalar arasında identik (tam) sinxronlaşmaya əsaslanır [34-35]. Bu isə ötürücü və qəbuledici sistemlər arasında parametr dəqiqliyinə olan tələbləri daha sərtləşdirir. Bu mənada xaoitik rəqslərin sinxronlaşmasının yeni növlərinin kəşfi bu cür sərt tələbləri yumşalda bilmişdir. Yeni sinxronlaşma növləri arasında aşağıdakıları qeyd etmək olar: faza sinxronlaşması [36-37], ümumiləşmiş sinxronlaşma [38], gecikən sinxronlaşma [37], qabaqlayıcı sinxronlaşma [39], küy hesabına sinxronlaşma [40]. Yeni sinxronlaşma növlərindən istifadə xaos əsasında kommunikasiya sistemlərində informasiya mübadiləsi proseslərini daha da təkmilləşdirməyə imkan verəcək. Qeyd etmək yerinə düşər ki, xaos əsasında ötürülən informasiyanın maskalanması informasiyanın qorunmasının stenoqrafik metoduna aid edilə bilər. Belə metodda kriptografik informasiya müdafiəsi metodundan fərqli olaraq, informasiyanın özü yox, onun ötürülməsi faktı gizlədilir.

İndi isə yuxarıda qeyd edilən bir sıra sinxronlaşma növləri haqqında bir az geniş məlumat verək. Tam (identik) sinxronlaşma rejimi birtərəfli və ya qarşılıqlı təsirdə olan sistemlərin dinamikasının tam üst-üstə düşməsi ilə xarakterizə olunur:  $x(t) = y(t)$  [34-35]. Ona görə də adətən belə sinxronlaşma sinxronlaşan sistemlərin parametrlərinin identik qiymətlərində baş verir. Əgər sistemlərin parametrləri bir az fərqlənirsə, o halda gecikən sinxronlaşma rejimi [37] mövcud ola bilər. Bu halda sinxronlaşan sistemlərin dinamikası bir-biri ilə  $x(t) = y(t + \tau)$  münasibəti ilə bağlıdır. Burada  $\tau$  gecikmə zamanıdır. Qeyd edək ki, sistemlər arasında əlaqə intensivliyini artırısaq gecikmə zamanı  $\tau$  sıfıra yaxınlaşır və beləliklə, gecikən sinxronlaşma rejimi tam sinxronlaşma rejiminə çevrilir.

Diaqnostik məqsədlər üçün tam sinxronlaşma zamanı adətən sinxronlaşma xətası adlanan

$$\langle e \rangle = \int_0^{\infty} \|x(t) - y(t)\| dt \quad (2)$$

kəmiyyəti hesablayırlar. Bir çox hallarda isə sinxronlaşma xətası kimi elə

$e(t) = x(t) - y(t)$  qəbul edilir.

Ümümləşmiş sinxronlaşmada [38] isə keçici proseslərdən sonra sinxronlaşan sistemlərin dinamikası arasında funksional əlaqə yaranır:

$$y(t) = F(x(t)). \quad (3)$$

Ümumi halda  $F(x(t))$  funksiyasının forması çox mürəkkəb ola bilər və onun müəyyənəşdirilməsi isə kifayət qədər vaxt aparan prosedurdur. Xaotik rəqslər arasında ümümləşmiş sinxronlaşma rejimini diaqnostika etmək üçün ədəbiyyatda bir neçə metod mövcuddur: yaxın qonşuluq metodu, şərti Lyapunov əmsallarının hesablanması metodu və s. Amma praktikada adətən bir az sadə yanaşma-köməkçi sistem metodu daha geniş istifadə olunur. Bu metodun mahiyyətini aşağıdakı kimi təsvir etmək olar. İdarə olunan  $y(t)$  sistemi ilə bərabər ona identik olan köməkçi  $z(t)$  sistemi də araşdırılır. Başlanğıc şərtləri hər iki sistem üçün fərqli seçilir. Bu, məsələn, fluktuasiya nəticəsində baş verə bilər. Belə müxtəlifliyə baxmayaraq əgər keçici proseslərdən sonra idarə olunan  $y(t)$  və köməkçi  $z(t)$  sistemlərin dinamikası üst-üstə düşürsə qəbul olunur ki, idarə edən  $x(t)$  və idarə olunan  $y(t)$  sistemlər arasında ümümləşmiş sinxronlaşma mövcuddur:  $y(t) = F(x(t))$ . Qeyd edək ki, idarə edən  $x(t)$  sistemi həm də idarə olunan  $y(t)$  sisteminin kopyasını  $z(t)$  da idarə edir. Başqa sözlə həm də  $z(t) = F(x(t))$  funksional münasibəti mövcuddur. Bir sözlə, idarəolunan və köməkçi sistemlərin dinamikasının ekvivalentliyi ümümləşmiş sinxronlaşmanın mövcudluğu üçün əsas şərtidir.

Sinxronlaşma rejiminin analizini həm də şərti Lyapunov əmsalının hesablanması vasitəsilə də həyata keçirmək olar: Əgər idarəedən (drive system) və idarəedilən (response system) sistemlərin fəza fazasının ölçüləri  $N_d$  və  $N_r$  –dirsə, birtətəfli bağlantıya malik əlaqəli xaotik ossilyatorların dinamikası Lyapunov əmsallarının spektri ilə xarakterizə oluna bilər. Birtərəfli bağlantıda idarəedən sistemin dinamikası idarəedilən sistemin vəziyyətindən asılı olmadığından, Lyapunov spektrləri iki yerə bölünə bilər: idarəedən sistemin Lyapunov spektri və idarəedilən sistemin şərti Lyapunov spektri. Bu halda ümümləşmiş sinxronlaşmanın varlığı meyarı olaraq idarəedilən sistemin şərti Lyapunov əmsallarının ən böyüyünün mənfəi olması qəbul edilir. Qeyd etmək olar ki, birtərəfli bağlantıya malik xaotik ossilyatorlar arasında tam sinxronlaşma və gecikən sinxronlaşma rejimi ümümləşmiş sinxronlaşma rejiminin xüsusi halı kimi qəbul edilə bilər.

Faza sinxronlaşmasında [36-37] əlaqəli xaotik rəqslərin fazaları arasında müəyyən korrelyasiya yaranır, amplitudları isə özlərini tam sərbəst və xaotik aparırlar və heç bir korrelyasiyaya məruz qalmırlar. Kəmiyyət cəhətdən belə sinxronlaşmanı xarakterizə etmək üçün ani faza  $\phi(t)$  anlayışından istifadə edilir. Ümumi halda isə elə bir universal üsul yoxdur ki, onun köməyiylə bütün dinamik sistemlər üçün adekvat olan faza anlayışı daxil etmək mümkün olsun.

Beləliklə, faza sinxronlaşması zamanı ən geniş yayılmış yanaşmada qəbul edildiyi kimi xaotik siqnalların  $x(t)$  və  $y(t)$ -nin fazalar fərqi zamana görə məhduddur:

$$|\phi_x(t) - \phi_y(t)| < \text{const.} \quad (4)$$

Belə sinxronlaşma adətən sistemlərin birtərəfli və ya qarşılıqlı əlaqələri hesabına baş verir.

İndi isə kaosun daha bir konstruktiv rolunu qeyd edək. Bu rol xaotik rəqslərin küyün vasitəsilə sinxronlaşmasıdır. Hadisənin mahiyyəti ondadır ki, kifayət qədər yüksək intensivliyə malik küyün bir-biri ilə əlaqəsi olmayan sistemlərə əlavə olunması nəticəsində bu sistemlər küyün hesabına öz dinamikalarını sinxronlaşdırır. Bu cür sinxronlaşma ilk baxışda intuitiv yanaşmaya zidd olsa da baş verə bilər. Adətən intuitiv olaraq düşünülür ki, küy yalnız destruktiv rola malik ola bilər. Gətirilən nümunə ona dəlalət edir ki, heç də həmişə intuitiv yanaşma düzgün qərarlara əsas ola bilməz [40].

Küy hesabına sinxronlaşmanın qısa, amma maraqlı tarixçəsi var. Küyün nizamlayıcı rolunu araşdıran tədqiqatçılar müşahidə etdilər ki, küyün təsiri ilə sistemin xaotikliyi azala bilər. Bu nəticə qeyri-xətti fizikada böyük polemikalara səbəb oldu. Müəlliflər tədqiqat obyektini kimi diskret logistik sistemi araşdırdılar [40]

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) + \xi_n, \quad (5)$$

$$y_{n+1} = 4y_n(1 - y_n) + \xi_n. \quad (6)$$

Burada  $\xi_n$   $[-W, W]$  intervalında paylanmış küyü göstərir. Araşdırmalar nəticəsində müəlliflər belə nəticəyə gəldilər ki,  $W$ -nin böyük qiymətlərində müxtəlif başlanğıc şərtlərindən başlayan trayektoriyalar eyni təbiətə malik küyün təsirindən öz dinamikalarını eyniləşdirirlər. Müəlliflər daha sonra nümayiş etdirdilər ki, belə vəziyyət həm diskret, həm də kəsilməz sistemlər, məsələn, Lorenz modeli üçün də mümkündür. Bu nəticə, yuxarıda qeyd edildiyi kimi ədəbiyyatda böyük polemikalara meydan açdı. Belə ki, mövcud baxışlara görə iki sistemin sinxronlaşması üçün ən böyük Lyapunov əmsalı mənfi olmalıdır. Logistik sistem üçün bu əmsal müsbət olduğundan baş verən sinxronlaşmanı kompüter hesablamalarının nəticəsinin yuvarlaqlaşması hesabına olduğunu iddia edənlər də var idi. Uzun polemikalardan sonra tədqiqatçılar belə bir ortaq məxrəcə gəldilər ki, baş verən sinxronlaşma həqiqətən də küyün hesabına həyata keçir. Sadəcə qəbul etmək lazımdır ki, küyün təsiri nəticəsində sinxronlaşan sistemlərdə yenidənqurma baş verir, sonra isə sistemlər öz vaxtlarının çox hissəsini əsasən stabillik oblastında (bu oblastda Lyapunov əmsalı mənfidir) keçirirlər və nəticədə global mənada Lyapunov əmsalının mənfiliyi təmin edilir.

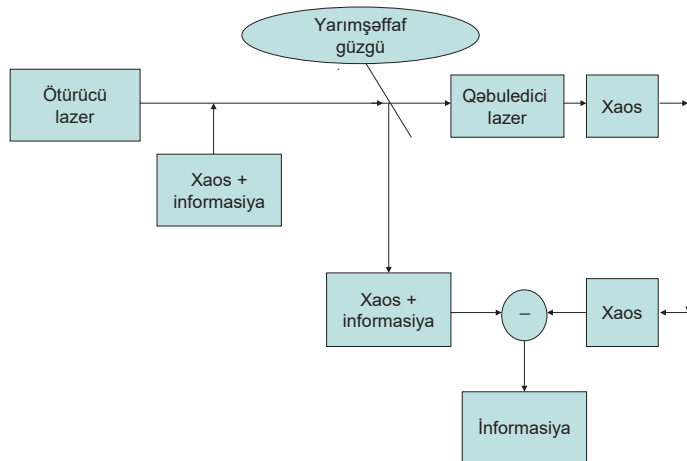
Sinxronlaşmanın digər növü isə proyeksiya sinxronlaşmasıdır [41-42].

Bu sinxronlaşma zamanı idarəedən  $x$  və idarə edilən  $y$  sistemlər aşağıdakı münasibəti ödəyirlər:

$$|kx - y| \rightarrow 0. \quad (7)$$

Sinxronlaşmanın bu növü ilk dəfə klassik Lorenz modelində həyata keçirilib.

Bir daha xaotik sinxronlaşmanın əsas tətbiq sahələrindən olan kaos əsasında məxfi informasiyanın ötürülməsi problemləri üzərində dayanacaq. Qeyd edək ki, əsas sinxronlaşma növü kimi adətən tam (identik) sinxronlaşma təklif olunur. Bu cür sinxronlaşmada minimal tələb kimi azı iki identik generatorların (ötürücü və qəbuledici generatorların) olması vacibdir. Elmi ədəbiyyatda informasiyanın maskalanmasının bir çox üsulları tədqiq olunub. Bura kaos hesabına maskalanma, xaotik rejimlərin dəyişməsi, informasiya signalının xaotik signal ilə qeyri-xətti qarışdırılması, ötürücü generatorların parametrlərinin informasiya signalı ilə modulyasiya olunması və sair kimi üsullar daxildir. Son illər bu məsələnin praktiki əhəmiyyətinə həsr olunan bir sıra dərc olunmuş məqalələrdə [43-44] kaos əsasında informasiya emalının optik diapazonda müasir mövcud fiber-optik sistemlərinin istifadəsi əsasında perspektivliyindən söhbət gedir (şək. 1.1). Bu fakt – mövcud infrastrukturdan istifadə oluna bilməsi praktiki cəhətdən çox böyük əhəmiyyətə malikdir. Bəzi çatışmazlıqlara gəlincə isə xüsusi olaraq vurğulamaq yerinə düşər ki, əsas problem informasiya emalında həlləedici rola malik sinxronlaşmanın bərqərar olması vaxtı ilə bağlıdır. Bu vaxt xaotik sistemlər arasında parametr uyğunsuzluğuna, informasiya kanalında küyün təsirinə və sair bu kimi real eksperimentin təsirlərinə çox həssasdır.



**Şək. 1.** Xaosun kommunikasiya sistemlərində tətbiqi: ötürücü sistemdə kaosla maskalanmış mesaj ötürücü və qəbuledici sistemlərin sinxronlaşması hesabına qəbuledici sistemdə deşifrə oluna bilər. Şəkildəki yarımsəffaf güzgü şüa bölücüsü kimi istifadə olunur.

## ӘДӘБИҮАТ

1. Лоскутов А.Ю. Очарование хаоса // УФН, 2010, т.180, № 12, с.1305-1329
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН, 2011, т. 181, № 2, с.121-149
3. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988, 240 с.
4. Mukherjee S., Ray, R., Samanta, R. et al. Nonlinearity and chaos in wireless network traffic // Chaos Solitons & Fractals, 2017, v. 96, pp.23-29
5. Li Y., Gu H. The distinct stochastic and deterministic dynamics period-adding and period-doubling bifurcations of neural bursting pattern // Nonlinear Dynamics, 2015, v. 87, No 4, pp. 2541-2562
6. Mandal P. S., Banerjee M. Deterministic chaos vs. stochastic fluctuations in an eco-epidemic model // Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2012, v. 7, No 3, pp. 99-116
7. Janson N.B. Non-linear dynamics of biological systems // Contemporary Physics, 2012, v. 53, No 2, pp. 137-168
8. Colombo G, Feckan M., Garay B.M. Inflated deterministic chaos and Smale's horseshoe // Journal of Difference Equations and Applications, 2012, v. 18, No 3, pp. 471-488
9. Masoliver J, Ros A. Integrability and chaos: classical uncertainty // European Journal of Physics, 2011, v. 32, No 2, pp. 431-438
10. Budroni M.A., Rustici M., Tiezzi, E. On the origin of chaos in the Belousev-Zabotinsky reaction in closed and unstirred reactors // Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2011, v. 6, No 1, pp.226-242
11. Blackbeard N., Erzgraeber H., Wieczorek S. Shear-induced bifurcations and chaos in three coupled lasers // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2011, v. 10, No 2, pp.469-509
12. Sahin S., Guzelis C., «Chaotification» of real systems by dynamic state feedback // IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2010, v. 52, No 6, pp. 222-233.
13. Matilla-Garcia M., Ruiz Marin M. A new test for chaos and determinism based on symbolic dynamics // Journal of Economic Behavior and Organization, 2010, v. 76, No 3, pp.600-614
14. Dercole F., Rinaldi S. Evolutionary dynamics can be chaotic: a first example // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2010, v. 20, No 11, pp.3473-3485
15. Petrovskii S, Morozov A., Malchow H. et al. Noise can prevent onset of chaos in spatio-temporal population dynamics // European Physical Journal B, 2010, v. 78, No 2, pp.253-264
16. Macek W.M. Chaos and multifractals in the solar wind // Advances in Space Research, 2010, v. 46, No 4, pp. 526-531
17. Iliopoulos A. C., Pavlos G. P. Global low dimensional chaos seismic chaos in the Hellenic region // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2010, v. 20, No 7, pp.2071-2095
18. Karatasou S., Santamouris M. Detection of low-dimensional chaos in buildings energy consumption time series // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, v. 15, No 6, pp.1603-1612
19. Navarro J., Arrieta C. Chaos in human behavior: the case of work motivation // Spanish Journal of Physiology, 2010, v. 13, No 1, pp. 244-256
20. El Boustani S., Destexhe A. Brain dynamics at multiple scales: can one reconcile the apparent low-dimensional chaos of macroscopic variables with the seemingly stochastic behavior of single neuron ? // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2010, v. 20, No 6, pp.1687-1702
21. Jakimowicz A. Catastrophes and chaos in business cycle theory // Acta Physica Polonica A, 2010, v. 117, No 4, pp.640-646

22. Dhanya C., Kumar D. Nonlinear ensemble prediction of chaotic daily rainfall // *Advances in Water Resources*, 2010, v. 33, No 3, pp.327-347
23. Boccaletti S., Grebogi C., Lai Y. et al. The control of chaos: theory and applications // *Physics Reports-Review Section of Physics Letters*, 2000, v. 329, No 3. pp. 103-197
24. Din Q., Saeed U. Bifurcation analysis and chaos control in a host-parasitoid model // *Mathematical models in the Applied Sciences*, 2017, v. 40, No 14, pp.5391-5406
25. Chaurasia S., Sinha S. Suppression of chaos through coupling to a external chaotic system // *Nonlinear Dynamics*, 2017, v. 87, No 1, pp.159-167
26. Shahverdiev E.M. Controlling chaos in some laser systems via variable coupling and feedback time delays // *International Journal of Modern Physics B*, 2016, v. 30, No 25, Article Number 1650181, pp.1-12
27. Chen X., Jing Z., Fu X. Chaos control in a pendulum system with excitations and phase shift // *Nonlinear Dynamics*, 2014, v. 78, No 1, pp.317-327
28. Cong F., Wang Z. Hua H. et al. Controlling chaos in Bose-Einstein condensate // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2012, v. 114, No 3, pp.377-381
29. Wang T., Jia N. Chaos control and hybrid projective synchronization of several new chaotic systems // *Applied Mathematics and Computation*, 2012, v. 218, No 13, pp. 7231-7240
30. Ott E., Grebogi C., Yorke J. Controlling chaos // *Phys. Rev. Lett*, 1990, v. 64, pp.1196-1999.
31. Pyragas K. Continuous control of chaos by self- controlling feedback // *Physics Letters A*, 1992, v. 170, No 6, pp.421-428
32. Pyragas K. Control of chaos via extended delayed feedback // *Physics Letters A*, 1995, v. 206, No 5-6, pp. 323-330
33. Pyragas K., Novicenko V. Time-delayed feedback control design beyond the odd-number limitation // *Physical Review E*, 2013, v. 88, No 1, Article Number 012903, pp.1-5
34. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G. The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports-Review Section of Physics Letters*, 2001, v. 366, No 1-2. pp.1-101
35. Vanwiggeren G., Roy R. Chaotic communication using time -delayed optical systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, v. 9, No 11, pp.2129-2156
36. Rosenblum M., Pikovsky A., Kurths J. Phase synchronization in driven and coupled chaotic oscillators // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I-Fundamental Theory and Applications*, 1997, v. 44, No 10, pp.874-881
37. Rosenblum M., Pikovsky A., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Physical Review Letters*, 1997, v. 78, No 22, pp.4193-4196
38. Abarbanel H., Rulkov N., Sushchik M. Generalized synchronization of chaos : The auxiliary system approach // *Physical Review E*, 1997, v. 55, No 5, pp.4528-4535
39. Cizak M., Mayol C., Mirasso C. R. et al. Anticipated synchronization in coupled complex Ginzburg-Landau systems // *Physical Review E*, 2015, v. 92, No 3, Article N 032911, pp. 1-6
40. Flandoli F., Gess B., Scheutzow M. Synchronization by noise // *Probability Theory and Related Fields*, 2017, v. 168, No 3-4, pp.511-556
41. Min F., Luo A. Complex dynamics of projective synchronization of Chua circuits with different scrolls // *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, v. 25, No 5, Article No 1530016, pp.1-8
42. Wei Z., Wang Z. Chaotic behavior and modified function projective synchronization of a simple system with one equilibrium point // *Kybernetika*, 2013, v. 49, No 2, pp.359-374
43. Argyris A., Syvridis D., Larger L. et al. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links // *Nature*, 2005, v. 438, No 7066, pp.343-346
44. Paul J., Lee M., Shore K. 3.5-GHz signal transmission in an all-optical chaotic communication scheme using 1550-nm diode lasers // *IEEE Photonics Technology Letters*, 2005, v. 17, No 4, pp.920-922

## ХАОС И ЕГО УПРАВЛЕНИЕ

Р.А.НУРИЕВ

### РЕЗЮМЕ

В этой статье приводится краткий обзор о детерминированном хаосе в динамических системах, методах управления хаоса, а также о синхронизации хаотических колебаний.

**Ключевые слова:** синхронизация, хаотические осцилляторы, метод Отта-Гребоги-Йорка, детерминированный хаос.

## CHAOS AND ITS MANAGEMENT

R.A.NURIYEV

### SUMMARY

In this paper our goal is to present a brief review of deterministic chaos, chaos control methods, including synchronization of chaotic oscillations in dynamical systems.

**Keywords:** synchronization, chaotic oscillators, Ott-Grebogi-Yorke method, Deterministic Chaos.

*Redaksiyaya daxil oldu: 15.10.2019-cu il*

*Çapa imzalandı: 28.12.2019-cu il*



UDK 621.38

## $Cu_3In_5S_9$ MONOKRİSTALINDA FOTOKEÇİRİCİLİYİN XÜSUSİYYƏTLƏRİ

L.H.HƏSƏNOVA, Ə.Z.MƏHƏMMƏDOV, S.Ə.CAHANGİROVA  
*Bakı Dövlət Universiteti*  
*vagif\_salmanov@yahoo.com*

*Yeni mürəkkəb  $Cu_3In_5S_9$  monokristalı alınmış, onun fotoelektrik xassələri tədqiq olunmuş və bu halda mənfi fotokeçiricilik müşahidə olunmuşdur. Çox az müşahidə olunan hadisə baxılan kristalın göyərilməsi zamanı yaranan defektlərin varlığı ilə izah olunmuşdur.*

**Açar sözlər:** mənfi fotokeçiricilik, defektlər, vakansiyalar.

$Cu_3In_5S_9$  birləşməsi I-III-VI qrup elementləri əsasında alınmış mürəkkəb halkogenidlərdən biri olub,  $A^I B^{III} C_2^{VI} - B_2^{III} C_3^{VI}$  kvazibinar sistemin hal diaqramının öyrənilməsi nəticəsində müşahidə olunmuşdur.

$Cu_3In_5S_9$  monokristalının sintezi və alınma rejiminin müəyyənləşdirilməsi üçün  $CuInS_2 - In_2S_3$  kəsiyində faza tarazlığı araşdırılıb. 1080 °C temperaturunda  $Cu_3In_5S_9$  birləşməsi alınmışdır və o, 800 °C temperaturda modifikasiya keçidinə malikdir. Tədqiq olunan kristalın tərkibində tez buxarlanan kükürd olduğundan, sintezin aparılması üçün xüsusi texnologiyadan istifadə edilmişdir. Monokristal yavaş soyutma üsulu ilə göyərdilmişdir. Bu üsulla layvari quruluşa malik iri kristal alınmışdır.  $Cu_3In_5S_9$  monoklin sinqoniyada kristallaşır və parametrləri  $a=6,60$ ;  $b=6,91$ ;  $c=8,12$  Å<sup>0</sup>;  $\beta=89^0$ ;  $z=1$  [1].

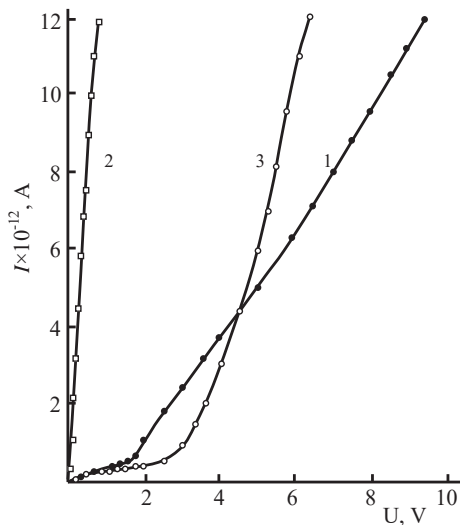
$Cu_3In_5S_9$  monokristalının optik və fotoelektrik xassələrinin araşdırılması göstərmişdir ki, kristalın fotohəssaslığı 0,85÷2,5 eV oblastını əhatə edir [2].

Bütün halkogenid birləşmələrində olduğu kimi,  $Cu_3In_5S_9$  monokristalında da çox böyük konsentrasiyaya malik defektlərin ehtimalı var. Bu anion və kationların düzülüşü zamanı anion və kation vakansiyaların yaranması nəticəsində mümkündür. Belə struktur defektləri və aşqar atomları kimi qəfəsin ayrı-ayrı düyünləri arasında kimyəvi əlaqənin düzgün paylanmasına gətirir və nəticədə qadağan olunmuş zonada lokal səviyyələr meydana çıxır. Vakansiya

struktur defektlərin ən sadə tipidir (Şottki defektləri) və qəfəsin düyünlərində boşluqlardan ibarətdir. Çox zaman fərz olunur ki, vakansiya yarımkeçiricinin səthinə yaxın atomların səthə çıxması nəticəsində yaranır, sonradan kristalın daxilindəki vakansiya səthə yaxın düyünə keçir və beləliklə, bütövlükdə kristalın daxilində vakansiya yaranır, kristalın bütün həcmində paylanır. Bəzən düyünlərdən qopmuş atomun yerində vakansiya yaranır, atomun özü isə düyünlər arasında qalır və birlikdə Frenkel defektləri yaradır. Yaranmış defektlər kristalın bütün xassələrinə təsir edir.

Baxılan işdə  $Cu_3In_5S_9$  monokristalında fotokeçiriciliyin tədqiqi zamanı mənfi fotokeçiricilik müşahidə olunmuş və təcrübənin nəticələri vakansiyalarla izah edilmişdir. Fotoelektrik xassələrini öyrənmək üçün layvari quruluşlu təkmil monokristaldan ölçüləri  $4 \times 2 \times 0,5 \text{ mm}^3$  olan nümunələr kəsilmiş, layların üzərinə gümüş pastasından kontaktlar qoyulmuşdur. 300 K temperaturda yükdaşıyıcıların konsentrasiyası və yürüklüyü, uyğun olaraq  $n=10^{16} \text{ sm}^{-3}$  və  $\mu=10 \div 30 \text{ sm}^2/\text{V} \cdot \text{san}$  olmuşdur. Ölçmə zamanı elektrik sahəsi laylara perpendikulyar istiqamətdə tətbiq edilmişdir. Ölçmələr 77 K temperaturunda aparılmışdır.

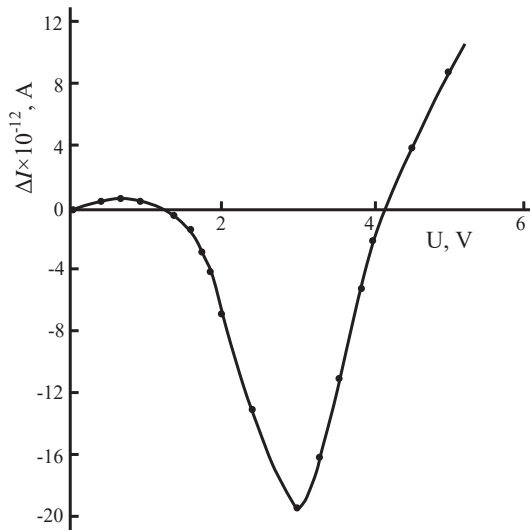
Fotoelektrik xassələrini öyrənən zaman mənfi fotokeçiricilik müşahidə olunmuşdur. Belə ki, nümunələrdə VAX öyrəniləndə nisbətən kiçik gərginliklərdə ( $U \leq 2 \text{ V}$ ), xətti asılılıq müşahidə olunur, gərginliyin sonrakı artması ilə superxətti asılılıq ( $I \sim U^2$ ) görünür (şəkil 1, 1 əyrisi).



Şəkil 1.  $Cu_3In_5S_9$  monokristalının VAX-ı. 1 – qaranlıqda; 2 –  $\lambda=0,85 \text{ mkm}$ ; 3 –  $\lambda=1,35 \text{ mkm}$ .

Belə asılılıq injeksiya cərəyanlarının yaranması ilə izah olunur. Nümunə məxsusi udma oblastından olan işıqla işıqlandırıldıqda ( $\lambda=0,85 \text{ mkm}$ ) yüksək keçiricilik müşahidə olunur (şəkil 1, 2 əyrisi), cərəyanın qiyməti gərginlik-

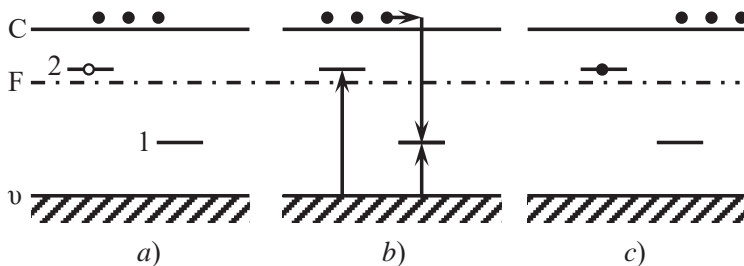
dən xətti asılı olur. Nümunəni  $\lambda > 0,85$  mkm dalğa uzunluqlu işıqla işıqlandırıldıqda nisbətən aşağı gərginliklərdə, zəif fotokeçiricilik müşahidə olunur, VAX-ın qeyri-xətti oblastında isə mənfi keçiricilik müşahidə olunur (şəkil 1, 3 əyrisi), yəni injeksiya cərəyanı sönür. Gərginliyin sonrakı artması ilə fotocərəyan gərginlikdən asılı olaraq artır (şəkil 2). Mənfi fotokeçiriciliyi izah etmək üçün müxtəlif mexanizmlər təklif olunmuşdur. [3] işində göstərilmişdir ki, işığın təsiri ilə eksitonlar yaranır ki, onlar termik ionlaşmış aşqar atomları ilə toqquşur və elektronlarını valent səviyyəsindən aşqar səviyyələrinə keçirməsinə və nəticədə dəşiklərin yaranmasına səbəb olur. Nəticədə sərbəst elektronların rekombinasiya sürəti artır və elektrokeçiriciliyi qaranlıq qiymətindən kiçik qiymətlərə qədər azalır.



Şəkil 2.  $Cu_3In_5S_9$  monokristalında fotocərəyanın gərginlikdən asılılığı.

Germanium kristalında müxtəlif təbiətli dərin aşqar səviyyələri olduqda mənfi fotokeçiricilik dəqiqliklə izah olunur [3], belə ki, bu halda aşqar mərkəzlərin fotoionizasiyası nəticəsində qeyri-əsas yükdaşıyıcılar yaranır, əsas yükdaşıyıcıların rekombinasiya sürəti artır və keçiricilik azalır.

Şəkil 3-də mənfi fotokeçiricilik halında elektron keçidləri göstərilmişdir, tutma mərkəzi nəzərə alınmır və qadağan olunmuş zonada 1 dərin və 2 dəyaz mərkəzləri var və nümunə şüalandırıldıqda aşağıdakı şərtlər ödənməlidir: a) 2 səviyyəsindən termik ionlaşma sürəti, 2 səviyyəsində elektron və deşiklərin rekombinasiya sürətindən kiçikdir; b) 2 səviyyəsində deşiklər elektronlarla rekombinasiya edə bilməz; c) 2 səviyyəsi Fermi səviyyəsindən yuxarıda yerləşməlidir; d) əsas yükdaşıyıcıların 2 səviyyəsi tərəfindən tutma en kəsiyi 1 səviyyəsi də tutma en kəsiyindən çox kiçik olmalıdır; e) 1 səviyyəsinin konsentrasiyası və onların qeyri-əsas yükdaşıyıcıları tutma en kəsiyi kiçik olmamalıdır.



Şəkl. 3. Mənfi fotokeçiricilik halında elektron keçidləri.

Deiyən şərtlərin bütün yarımkeçiricilərdə eyni zamanda ödənməsi az ehtimallıdır, ona görə mənfi fotokeçiricilik adı halda az müşahidə olunan hadisədir.

[4] işində çox alçaq temperaturalarda (He temperaturunda), güclü aşqarlanmış germanium kristalında mənfi fotokeçiricilik müşahidə olunmuş və onu izah etmək üçün fərz olunmuşdur ki, nümunə işıqlandırılan zaman donor səviyələrinin dolması ilə elektrikkeçiriciliyi azalır, çünki təcrübə şəraitində elektronlar neytron donorlardan «sıçrayışla» yüklü səviyələrə keçir və boş qalmış yerlərdə yükdaşıyıcıların rekombinasiyası baş verir.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Тагиров В.И., Гахраманов Н.Ф., Гусейнов А.Г. Новый класс тройных полупроводниковых соединений типа  $A_3^I B_5^{III} C_9^{VI}$ . Баку, 2001, 303 с.
2. Huseynov A.G., Kyazim-zade A.G., Salmanov V.M., Mamedov R.M., Salmanova A.A., Hasanova L.G., Mahammadov A.Z. Features of Laser-Induced Luminescence and Photoconductivity of Layered  $Cu_3In_5S_9$  Crystals. Optics and Spectroscopy, 2016, Vol. 121, № 6, pp. 897–900.
3. Вавилов В.С. Действие излучений на полупроводники. М., 1963, 256 с.
4. Добрега В.П., Рывкин С.М. ФТТ, №4, 1962, с. 553.

#### ОСОБЕННОСТИ ФОТОПРОВОДИМОСТИ В МОНОКРИСТАЛЛЕ $Cu_3In_5S_9$

Л.Г.ГАСАНОВА, А.З.МАГОМЕДОВ, С.А.ДЖАХАНГИРОВА

#### РЕЗЮМЕ

Исследована фотопроводимость в монокристалле нового тройного полупроводникового соединения  $Cu_3In_5S_9$ . Вольт-амперные характеристики снятые при 77 К в темноте и при освещении, показали, что наблюдается отрицательная фотопроводимость. Это объясняется наличием большой концентрацией дефектов присущей для многих халькогенидов.

**Ключевые слова:** отрицательная фотопроводимость, дефекты, вакансии

## FEATURES OF PHOTOCONDUCTIVITY IN A SINGLE CRYSTAL $Cu_3In_5S_9$

L.G.HASANOVA, A.Z.MAHAMMADOV, S.A.DJAHANGIROVA

### SUMMARY

The photoconductivity in a single crystal of a new triple semiconductor compound  $Cu_3In_5S_9$  is investigated. The current – voltage characteristics measured at 77 K in the dark and under illumination showed that negative photoconductivity is observed. This is due to the presence of a large concentration of defects inherent in many chalcogenides.

**Keywords:** negative photoconductivity, defects, vacant

*Redaksiyaya daxil oldu: 18.09.2019-cu il*

*Çapa imzalandı: 28.12.2019-cu il*

## MÜNDƏRİCAT

## RİYAZİYYAT

**Əliyev N.Ə., Mustafayeva Y.Yu.**

Qeyri-lokal sərhəd şərtləri olan üçölçülü hiperbolik tənlik üçün qoyulmuş məsələnin həlli ..... 5

**Qasimov E.A.**

Bəzi transendent tənliklərin asimptotik həll üsulları..... 25

**Həsənov F.M.**

Dairəvi və elliptik şəffaf silindirlər strukturunda nöqtəvi mənbəyin difraksiya məsələsinin uzaq zonada ədədi tədqiqinə inteqral tənliklər üsulunun tətbiqi..... 31

**Bağirov Ş.Q.**

Baş hissədə biharmonik operator olan yarımxətti parabolik tənliyin qlobal həllinin yoxluğu ..... 38

**Şəfiyeva G.**

Klein-Qordon tənliklər sistemlərinin qlobal həllinin varlığı və asimptotikası ..... 50

**Əhmədova J.B., Nağıyeva İ.F.**

Gecikməyə malik bir diskret optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün zəruri şərtlər ..... 59

**Nağıyev H.Ə., Əliyeva F.A.**

Fasiləsiz axında karbohidrogenlərin hidrotəmizləmə proseslərinin qeyri-stasionar təsirli idarə strategiyası..... 65

**Kiyasbəyli E.T., Əkbərli R.S.**

Qabarcıqlı özlü mayenin özlü-elastiki boruda dalğalıvari hərəkəti ..... 74

**Tariverdiyeva Ç.Q.**

Sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyasının sıfırlarına görə bərpası ..... 81

**Əliyev N.Ə., Fətullayeva L.F.**

Kvadrat üzərində Koşi-Riman tənliyi üçün Tixonov-Lavrentyev məna da bir tərs məsələ haqqında ..... 86

## MEXANİKA

**Əliyev A.B., Rəhimova K.R., Mahmudzadə T.M.**

İdeal sıxılmayan mayenin elastiki boruda pulsasiyalı hərəkəti..... 91

## İNFORMATİKA

<b>Alışov M.Ə., İmanova N.A., Xəlilov M.S.</b> İnformatika fənni üzrə modul proqramın tərtibi .....	99
--	----

## FİZİKA

<b>Məsimov E.Ə., Şahbazova G.M., Ocaqverdiyeva S.Y.</b> Polietilenqlikol-limon turşusunun Na duzu - su ikifazalı sisteminin ayırma qabiliyyətinə kiçikmolekullu birləşmələrin təsiri.....	111
<b>Rəcəbov M.R.</b> Pozitronun kanallaşma şüalanması .....	123
<b>Paşayev B.G.</b> Su-PEQ-KI sistemlərinin özlü axınının aktivləşmə parametrləri və məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmi .....	130
<b>Vəliyeva L.İ., Güləhmədov O.G.</b> Biomolekulların fəza quruluşunun tədqiqində istifadə olunan üsullar .....	137
<b>Nuriyev R.A.</b> Xaos və onun idarə olunması .....	142
<b>Həsənova L.H., Məhəmmədov Ə.Z., Cahangirova S.Ə.</b> $Cu_3In_5S_9$ monokristalında fotokeçiriciliyin xüsusiyyətləri .....	156

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

**Алиев Н.А., Мустафаева Е.Ю.**  
 Разрешимость нелокальной граничной задачи для трехмерного гиперболического уравнения..... 5

**Гасымов Э.А.**  
 Асимптотические методы решения некоторых трансцендентных уравнений ..... 25

**Гасанов Ф.М.**  
 Применение метода интегральных уравнений к численному исследованию задачи дифракции поля точечного источника на решетке прозрачных круговых и эллиптических цилиндров ..... 31

**Багыров Ш.Г.**  
 Отсутствие глобальных решений полулинейного параболического уравнения с бигармоническим оператором в главной части..... 38

**Шафиева Г.**  
 Существование и асимптотика глобальных решений систем уравнений Клейна-Гордона ..... 50

**Ахмедова Ж.Б., Нагиева И.Ф.**  
 Необходимые условия оптимальности в одной дискретной задаче оптимального управления с запаздыванием ..... 59

**Нагиев Г.А., Алиева Ф.А.**  
 Стратегия нестационарного управления процессами гидроочистки углеводородов, осуществляющихся в непрерывном потоке ..... 65

**Киясбейли Э.Т., Акперли Р.С.**  
 Волновое движение пузырьковой вязкой жидкости в вязкоупругой трубе..... 74

**Таривердиева Ч.Г.**  
 Восстановление характеристической функции краевой задачи по своим нулям..... 81

**Алиев Н.А., Фатуллаева Л.Ф.**  
 Об одной обратной задаче в смысле Тихонова-Лаврентьева для уравнения Коши-Римана на квадрате ..... 86



## МЕХАНИКА

<b>Алиев Ф.Б., Рагимова К.Р., Махмудзаде Т.М.</b> Импульсное течение в упругой трубе идеальной несжимаемой жидкости.....	91
---	----

## ИНФОРМАТИКА

<b>Алышов М.А., Иманова Н.А., Халилов М.С.</b> Составление модульных программ по предмету информатики .....	99
--	----

## ФИЗИКА

<b>Масимов Э.А., Шахбазова Г.М., Оджавердиева С.Й.</b> Влияние низкомолекулярных веществ на разделительную способность двухфазной системы ПЭГ – натриевая соль лимонной кислоты – вода.....	111
<b>Раджабов М.Р.</b> Излучение позитронов при каналировании в кристалле.....	123
<b>Пашаев Б.Г.</b> Параметры активации вязкого течения в системах вода-ПЭГ-К1 и парциальный молярный объем в растворе ПЭГ.....	130
<b>Велиева Л.И., Гулехмедов О.Г.</b> Методы используемые при изучении пространственной структуры Биомолекул .....	137
<b>Нурiev Р.А.</b> Хаос и его управление .....	142
<b>Гасанова Л.Г., Магомедов А.З., Джахангирова С.А.</b> Особенности фотопроводимости в монокристалле $Cu_3In_3S_9$ .....	156

## CONTENTS

## MATHEMATIC

<b>Aliev N.A., Mustafayeva Y.Yu.</b> Solvability of nonlocal boundary problem for three-dimensional hyperbolic equation .....	5
<b>Gasymov E.A.</b> Asymptotik methods for solving some transcendental equations .....	25
<b>Gasanov F.M.</b> Application of the method of integral equations to numerical investigation of the problem of defraction of the point source field on the grid of transparant circular and elliptic cylinders.....	31
<b>Bagirov Sh.H.</b> The absence of global solutions of a semilinear parabolic equation with a biharmonic operator in the main part .....	38
<b>Shafiyeva G.</b> Existence and asymptotic of global solutions of the systems of Klein-Gordon equations.....	50
<b>Ahmedova Zh.B., Nagieva I.F.</b> Necessary conditions for optimality in one discrete optimal control problem with delay .....	59
<b>Nagiev H.A., Alieva F.A.</b> Strategy for non-stationary control of the processes of hydrocarbon treatment carried out in a continuous flowannotation .....	65
<b>Kiyasbeyli E.T., Akperli R.S.</b> Wave motion of a viscous bubble liquid in a viscoelastic pipe .....	74
<b>Tariverdiyeva Ch.G.</b> Reconstruction of the characteristic function of the boundary value problem at its zero.....	81
<b>Aliyev N.A., Fatullayeva L.F.</b> On one inverse problem in the meaning of Tikhonov-Lavrentiev for equation of Koshi-Roman on a square .....	86

## MECHANIC

<b>Aliyev A.B., Rahimova K.R., Mahmudzade T.M.</b> Pulse flow in elastic pipe of ideal non-squeezed liquid .....	91
---	----

## INFORMATICS

**Alyshov M.A., Imanova N.A., Khalilov M.S.**

Development of modular programs  
on the subject of informatics ..... 99

## PHISIC

**Masimov E.A., Shahbazova G.M., Ojagverdieva S.Y.**

The influence of low molecular weight substances  
to the seperation ability of the aqueous two-phase system  
PEG — sodium salt of citric acid — water ..... 111

**Rajabov M.R.**

Radiation of positrons channeled in a crystal ..... 123

**Pashayev B.G.**

Activation parameters of viscous flow of systems water-PEG-KI  
and partial molar volumes of polyethylene glycol in solutions ..... 130

**Veliyeva L.I., Gulexmedov O.G.**

Methods used in the study of the spatial structure of biomolecules..... 137

**Nuriyev R.A.**

Chaos and its management..... 142

**Hasanova L.G., Mahammadov A.Z., Djahangirova S.A.**

Features of photoconductivity in a single crystal  $Cu_3In_3S_9$  ..... 156